2022年中华人民共和国普通高等学校

联合招收华侨、港澳地区、台湾省学生入学考试

数　学

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．设集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{x|x^2\in A\}$,则 $A\cap B=($　　$)$

（A）$\{1\}$　　（B）$\{1,2\}$　　（C）$\{1,4\}$　　（D）$\varnothing$

2．已知 $z=\dfrac{2+i}{1+i}$，则 $z+\bar{z}=($　　$)$

（A）$\dfrac{1}{2}$　　（B）1　　（C）$\dfrac{3}{2}$　　（D）3

3．已知向量 $a=(x+2,1+x)$，$b=(x-2,1-x)$，若 $a//b$，则(　　)

（A）$x^2=2$　　（B）$|x|=2$　　（C）$x^2=3$　　（D）$|x|=3$

4．不等式 $\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}-3<0$ 的解集是(　　)

（A）$(-1,0)\cup(0,\frac{1}{3})$　　（B）$(-3,0)\cup(0,1)$

（C）$(-\infty,-1)\cup(\frac{1}{3},+\infty)$　　（D）$(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

5．以 $(1,0)$ 为焦点，y 轴为准线的抛物线的方程是(　　)

（A）$y^2=x-\dfrac{1}{2}$　　（B）$y^2=x+1$　　（C）$y^2=2x-1$　　（D）$y^2=2x+1$

6．底面积为 2π，侧面积为 6π 的圆锥的体积是(　　)

（A）8π　　（B）$\dfrac{8\pi}{3}$　　（C）2π　　（D）$\dfrac{4\pi}{3}$

7．设 x_1 和 x_2 是函数 $f(x)=x^3+2ax^2+x+1$ 的两个极值点，若 $x_2-x_1=2$，则 $a^2=($　　$)$

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

8．已知函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$，若 $f(\frac{\pi}{3})=f(-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$，则 $\varphi=($　　$)$

（A）$2k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$　　（B）$2k\pi+\dfrac{\pi}{3}(k\in Z)$　　（C）$2k\pi-\dfrac{\pi}{3}(k\in Z)$　　（D）$2k\pi-\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$

9．函数 $y=2^{\frac{1}{x}}(x>0)$ 的反函数(　　)

（A）$y=\dfrac{1}{\log_2 x}(x>1)$　　（B）$y=\log_2\dfrac{1}{x}(x>1)$

（C）$y=\dfrac{1}{\log_2 x}(0<x<1)$　　（D）$y=\log_2\dfrac{1}{x}(0<x<1)$

10．设等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1，公比为 q，前 n 项和为 S_n，令 $b_n=S_n+2$，若 $\{b_n\}$ 也是等比数列，则 $q=$(　　)

（A）$\dfrac{1}{2}$　　（B）$\dfrac{3}{2}$　　（C）$\dfrac{5}{2}$　　（D）$\dfrac{7}{2}$

11．若双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线与直线 $y=2x+1$ 垂直，则 C 的离心率为(　　)

（A）5　　（B）$\sqrt{5}$　　（C）$\dfrac{5}{4}$　　（D）$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

12．在 1，2，3，4，5，6，7，8，9 中任取 3 个不同的数，则这 3 个数的和能被 3 整除的概率是(　　)

（A）$\dfrac{9}{28}$　　（B）$\dfrac{1}{3}$　　（C）$\dfrac{5}{14}$　　（D）$\dfrac{2}{5}$

二、填空题：本题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

13．曲线 $y=x\ln x$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程是________________．

14．已知 O 为坐标原点，点 P 在圆 $(x+1)^2+y^2=9$ 上，则 $|OP|$ 的最小值为_____________．

15．若 $\tan\theta=3$，则 $\tan 2\theta=$_____________．

16．设函数 $f(x)=a^x(a>0$,且 $a\neq 1)$ 是增函数，若 $\dfrac{f(1)-f(-1)}{f(2)-f(-2)}=\dfrac{3}{10}$，则 $a=$______．

17．在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=1$，$AA_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角的大小为________．

18．设 $f(x)$ 是定义域为 R 的奇函数，$g(x)$ 是定义域为 R 的偶函数。若 $f(x)+g(x)=2^x$，则 $g(2)=$______________．

三、解答题：本大题共 4 小题；每小题 15 分，共 60 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

19．记△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为a，b，c，已知$\sin A=3\sin B$，$C=\dfrac{\pi}{3}$，$c=\sqrt{7}$．

(1)求a；

(2)求$\sin A$．

20．设$\{a_n\}$是首项为 1，公差不为 0 的等差数列，且a_1，a_2，a_6成等比数列．

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)令$b_n=(-1)^n a_n$，求数列$\{b_n\}$的前n项和S_n．

21．甲、乙两名运动员进行五局三胜制的乒乓球比赛，先赢得3局的运动员获胜，并结束比赛．设各局比赛的结果相互独立，每局比赛甲赢的概率为$\frac{2}{3}$，乙赢的概率为$\frac{1}{3}$．

(1)求甲获胜的概率；

(2)设X为结束比赛所需要的局数，求随机变量X的分布列及数学期望.

22．已知椭圆C的左、右焦点分别为$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，直线$y=\frac{2\sqrt{3}}{3}x$交C于A、B两点，$|AB|=2\sqrt{7}$，四边形AF_1BF_2的面积为$4\sqrt{3}$．

(1)求c；

(2)求C的方程.

2022年中华人民共和国普通高等学校

联合招收华侨、港澳地区、台湾省学生入学考试

数学参考答案

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	D	A	C	C	B	D	D	A	B	D	A

二、填空题：本题共6小题，每小题5分，共30分。

题号	13	14	15	16	17	18
答案	$x-y-1=0$	2	$-\dfrac{3}{4}$	3	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{17}{8}$

三、解答题：本题共4小题，每小题15分，共60分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

19. 【答案】(1) $a=3$；(2) $\sin A=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$.

【解析】(1)由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，得 $\sin A=\dfrac{a}{2R}$， $\sin B=\dfrac{c}{2R}$，

代入已知得 $a=3b$，

由余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2a\cdot b\cdot\cos C$，故 $7=(3b)^2+b^2-2\cdot(3b)\cdot b\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}$，

解得 $b=1$，故 $a=3$；

(2)由正弦定理可得 $\sin A=\dfrac{a\cdot\sin C}{c}=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$.

20. 【答案】(1) $a_n=3n-2$；(2) $S_n=\dfrac{1+(6n-1)\cdot(-1)^n}{4}$ (也可表示为 $S_n=\begin{cases}\dfrac{3n}{2}, n\text{为偶数},\\ \dfrac{1-3n}{2}, n\text{为奇数}.\end{cases}$).

【解析】(1)由题意可设等差数列的公差为 d，则 $a_n=1+(n-1)d,(d\neq 0)$，

由三项成等比可得 $a_2^2=a_1\cdot a_6$，故 $(1+d)^2=1\times(1+5d)\Rightarrow d^2-3d=0$，

又已知 $d\neq 0$，故 $d=3$，所以 $a_n=3n-2$；

(2)由(1)知$b_n=(3n-2)\cdot(-1)^n$，

$S_n=-1+4+(-7)+10+\cdots+(3n-2)\cdot(-1)^n$ ①，

$-S_n=\quad 1+(-4)+7+\cdots+(3n-5)\cdot(-1)^n+(3n-2)\cdot(-1)^{n+1}$ ②，

①－②，得 $2S_n=-1+3+(-3)+\cdots+3\cdot(-1)^n-(3n-2)\cdot(-1)^{n+1}$.

$$=-1+\frac{3(1-(-1)^{n-1})}{1-(-1)}+(3n-2)\cdot(-1)^n=\frac{1+(6n-1)\cdot(-1)^n}{2}$$

即 $S_n=\dfrac{1+(6n-1)\cdot(-1)^n}{4}\ (n\in N^+)$.

21．【答案】(1) $p=\dfrac{64}{81}$；(2) $E(X)=\dfrac{107}{27}$.

【解析】(1)记A事件：“甲获得胜利”；则其中包含了3个不同类别

A_1事件：“甲3:0获得胜利”，则$P(A_1)=(\frac{2}{3})^3=\frac{8}{27}$；

A_2事件：“甲3:1获得胜利”则$P(A_2)=C_3^2\cdot(\frac{2}{3})^2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$；

A_3事件：“甲3:2获得胜利”则$P(A_3)=C_4^2\cdot(\frac{2}{3})^2\cdot(\frac{1}{3})^2\cdot\frac{2}{3}=\frac{16}{81}$；

故$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{8}{27}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}=\frac{64}{81}$.

(2)比赛所需要的局数$X=3,4,5$.

$P(X=3)=(\frac{2}{3})^3+(\frac{1}{3})^3=\frac{8}{27}+\frac{1}{27}=\frac{1}{3}$；

$P(X=4)=C_3^2(\frac{2}{3})^2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+C_3^1\cdot\frac{2}{3}\cdot(\frac{1}{3})^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{8}{27}+\frac{2}{27}=\frac{10}{27}$；

$P(X=5)=C_4^2\cdot(\frac{2}{3})^2\cdot(\frac{1}{3})^2\cdot\frac{2}{3}+C_4^2\cdot(\frac{2}{3})^2\cdot(\frac{1}{3})^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{8}{27}$.

故随机变量X的概率分布列为

X	3	4	5
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{8}{27}$

函数期望$E(X)=3\times\frac{1}{3}+4\times\frac{10}{27}+5\times\frac{8}{27}=\frac{107}{27}$.

22. 【答案】(1) $c=\sqrt{3}$；(2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1$.

【解析】(1)由椭圆的对称性可知 $|OA|=|OB|=\frac{1}{2}|AB|=\sqrt{7}$，

不妨设 $A(x_1,y_1)(x_1>0)$，则 $B(-x_1,-y_1)$；

由点 $A(x_1,y_1)$ 在直线 $y=\frac{2\sqrt{3}}{3}x$ 上，且 $|OA|=\sqrt{7}$，得 $\begin{cases} y_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}x_1, \\ x_1^2+y_1^2=7. \end{cases}$

解得：$\begin{cases} x_1=\sqrt{3}, \\ y_1=2. \end{cases}$，故 $A(\sqrt{3},2)$，$B(-\sqrt{3},-2)$，

由对称性知四边形 AF_1BF_2 为平行四边形，

由 $S_{AF_1BF_2}=2S_{\Delta F_1AF_2}=2\times\frac{1}{2}\times|F_1F_2|\times|y_1|=4c=4\sqrt{3}$，所以 $c=\sqrt{3}$

(2)设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，由(1)知，$F_1(-\sqrt{3},0)$，$F_2(c,0)$.

由椭圆定义 $2a=|AF_1|+|AF_2|=2+4=6$，故 $a=3$.

又 $c=\sqrt{3}$，故 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{6}$，所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1$.