2022 年暨南大学、华侨大学联合招收港澳台、海外华侨、华人及其他外籍学生入学考试题目

数学(答卷时间：2 小时)

一、选择题：本大题共 15 小题，每小题 4 分，共 60 分。在每小题所给出的四个选项中只有一个是正确的，把你的选择按题号填入答题纸。

1.设集合 $A=\{1,2,a\},B=\{2,3\}$，若 $B\subseteq A$，则实数 a 的值是(　　)

A.1　　B.2　　C.3　　D. 2 或 3

2.函数 $y=\ln(x^2-4x+3)$ 的单调减区间为(　　)

A. $(2,+\infty)$　　B. $(3,+\infty)$　　C. $(-\infty,2)$　　D. $(-\infty,1)$

3.已知 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，则 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=$(　　)

A. $-\frac{\sqrt{2}}{10}$　　B. $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{10}$　　D. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

4.若 $\log_2 a+\log_{\frac{1}{2}} b=2$，则有(　　)

A. $a=2b$　　B. $b=2a$　　C. $a=4b$　　D. $b=4a$

5.方程 $(\frac{1}{2})^{x^2-3x-11}=2$ 的解集是(　　)

A. $\{-2,5\}$　　B. $\{2,-5\}$　　C. $\{2,5\}$　　D. $\{-2,-5\}$

6.已知 $a<-1$，则 $\sqrt{3}-\left|\sqrt{3}-|a-\sqrt{3}|\right|=$(　　)

A. $\sqrt{3}+a$　　B. $\sqrt{3}-a$　　C. $3\sqrt{3}+a$　　D. $3\sqrt{3}-a$

7.已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，公差 $d\neq0$，且 a_1，a_2，a_5 成等比数列，则 $d=$(　　)

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

8.已知函数 $f(x)=\frac{x^2+3x+1}{x^2+1}$，若 $f(a)=\frac{2}{3}$，则 $f(-a)=$(　　)

A. $\frac{2}{3}$　　B. $-\frac{2}{3}$　　C. $\frac{4}{3}$　　D. $-\frac{4}{3}$

9. 有良田一亩，价三百，薄田七亩，价五百。今并买一顷（等于一百亩），价钱一万。问良田、薄田几何？(　　)

A. 13.2 亩；86.8 亩　B. 12.5 亩；87.5 亩　C. 19.5 亩；80.5 亩　D. 23.7 亩；76.3 亩

10.已知 $a=3^{-\frac{1}{4}}$，$b=\log_3\frac{1}{4}$，$c=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{4}$，则(　　)

A. $a>b>c$　B. $a>c>b$　C. $c>b>a$　D. $c>a>b$

11.将函数 $y=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位，所得函数图象的一条对称轴的方程为(　　)

A. $x=\frac{\pi}{3}$　B. $x=\frac{\pi}{6}$　C. $x=\frac{\pi}{12}$　D. $x=-\frac{\pi}{12}$

12.已知 $(ax^2+\frac{1}{\sqrt{x}})^5$ 的展开式中常数项是 -80，则实数 $a=$(　　)

A. -16　B. 16　C. -18　D. 18

13.从编号分别为 1，2，3，4，5，6 的六个大小完全相同的小球中，随机取出三个小球，则恰有两个小球编号相邻的概率为(　　)

A. $\frac{1}{3}$　B. $\frac{2}{5}$　C. $\frac{3}{5}$　D. $\frac{4}{5}$

14.在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 BC 的中点，点 P 在线段 D_1E 上，则点 P 到直线 CC_1 的距离的最小值为(　　)

A. 1　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

15.已知奇函数 $f(x)$ 是定义在 $(-1,1)$ 上的减函数，满足 $f(1-m)+f(1-m^2)<0$ 的实数 m 的取值范围是(　　)

A. $(-1,0)$　B. $(0,1)$　C. $(-\infty,-1)$　D. $(1,+\infty)$

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分,共 30 分，把答案按题号填入答题纸。

16. 过点 $A(0,-1)$ 且与直线 $2x-y+3=0$ 垂直的直线方程是____________.

17. 设数列 $\{a_n\}$ 为公比为 $q>1$ 的等比数列，若 a_{2020} 和 a_{2021} 是方程 $4x^2-8x+3=0$ 的两根，则 $a_{2022}+a_{2023}=$______.

18. 已知函数 $f(x)=\frac{3x+1}{x+a}(x\neq -a, a\neq\frac{1}{3})$，使 $f^{-1}(x)=f(x)$ 的实数 a 的值为_________.

19. 在ΔABC中，角A、B、C所对的边分别为a、b、c，若$b^2=ac$，且$\cos B=\frac{4}{5}$，则$\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan C}$的值是_________.

20. 已知双曲线$mx^2-ny^2=1(m>0,n>0)$的离心率为2，则椭圆$mx^2+ny^2=1$的离心率为__________.

21. 五个男生两个女生排成一排拍照，若男生甲必须排在排头或排尾，两个女生必须排在一起，不同的排法共有_________(结果用数字作答)种.

三、解答题：本大题共4小题，每小题15分，共60分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤，请把你的解答按题号写在答题纸上）

22. 在锐角ΔABC中，角A、B、C所对的边分别为a、b、c，且$a=2$，$2\sin A=\sin C$.

(1)求c的长；

(2)若$\cos 2C=-\frac{1}{4}$，求ΔABC的面积。

23. 已知函数$f(x)$对任意$x,y\in R$，满足$f(x)+f(y)=f(x+y)+2$，且当$x>0$时，$f(x)>2$，$f(3)=5$.

(1)证明：函数$f(x)$为增函数；

(2)求关于x的不等式$f(x^2-2x-2)<3$的解集。

24.（选考历史或地理的考生做题目 I,不必做题目 II，选考物理、化学或生物的考生做题目 II，不必做题目 I).

I.已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=2$，$a_{n+1}-S_n=2(n\in N^+)$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设$b_n=\log_2 a_n$，$c_n=a_n\cdot b_n$，求数列$\{c_n\}$的前n项和T_n.

II. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，$a_n-a_{n-1}=2^{n-1}(n\geq 2)$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设$b_n=(\log_2 a_n)^2$，求数列$\{(-1)^n\cdot b_n\}$的前$2n$项的和S_{2n}.

25.（选考历史或地理的考生做题目 I，不必做题目 II，选考物理、化学或生物的考生做题目 II，不必做题目 I）。

I. 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点$(1,\dfrac{3}{2})$，离心率为$\dfrac{1}{2}$，左、右焦点分别为$F_1,F_2$，过$F_1$的直线交椭圆于$A$，$B$两点.

(1)求椭圆C的标准方程；

(2)当ΔF_2AB的面积为$\dfrac{12\sqrt{2}}{7}$时，求直线AB的方程.

II.已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，点$B(0,\sqrt{3})$在椭圆$C$上，$\Delta F_1BF_2$是等边三角形.

(1)求椭圆C的标准方程；

(2)点A在椭圆C上，线段AF_1与线段BF_2交于点M，若ΔMF_1F_2与ΔAF_1F_2的面积之比为$2:3$，求点M的坐标.

2022 年暨南大学、华侨大学招收、港、澳、台、华侨、华人及其他外籍学生入学考试数学参考答案

一、选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
答案	C	D	B	C	A	A	D	C	B	D	C	A	C	D	B

二、填空题：

16、 $x+2y+2=0$； **17**、 18； **18**、 -3； **19**、 $\frac{5}{3}$； **20**、 $\frac{\sqrt{6}}{3}$； **21**、 480.

三、解答题：

22、(1)由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$， 可知 $c=2a=4$ ………6 分

(2)由 $\cos 2C=1-2\sin^2 C=-\frac{1}{4}$，得 $\sin^2 C=\frac{5}{8}\Rightarrow \sin C=\frac{\sqrt{10}}{4}$，

由于 ΔABC 为锐角三角形，故角 C 为锐角 $\therefore \cos C=\frac{\sqrt{6}}{4}$

由余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，得 $b^2-\sqrt{6}b-12=0$，

解得：$b=2\sqrt{6}$ 或 $b=-\sqrt{6}$ (舍)。

由 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot \sin C$，得 $S_{\Delta ABC}=\sqrt{15}$ ………15 分

23、解：任取 $x_1,x_2\in R$ 且 $x_2>x_1$，则 $t=x_2-x_1>0$，由题意可知 $f(t)>2$，

故 $f(x_2)=f(x_1+t)=f(x_1)+f(t)-2>f(x_1)$

所以函数 $f(x)$ 为 R 上的增函数.……7 分

(2)取 $x=y=1$，代入已知可得：$2f(1)=f(2)+2$

取 $x=1$，$y=2$，代入已知可得：$f(1)+f(2)=f(3)+2=7$

解得：$f(1)=3, f(2)=4$.

由 $f(x^2-2x-2)<3\Rightarrow f(x^2-2x-2)<f(1)$，

由(1)函数 $f(x)$ 为 R 上的增函数，故 $x^2-2x-2<1$，

解得：$\{x|-1<x<3\}$ ·········15 分

24、Ⅰ.解：(1)当 $n=1$ 时，由已知得 $a_2-S_1=2$，

由 $a_1=S_1=2$，得 $a_2=4$，

当 $n\ge 2$ 时，由 $a_n=S_n-S_{n-1}=(a_{n+1}-2)-(a_n-2)$，

得 $a_{n+1}=2a_n$，而 $a_2=2a_1$ 也成立，

故 $a_{n+1}=2a_n$，$n\in N^+$，

所以 $a_n=2^n$.······ 7 分

(2) $b_n=\log_2 a_n=n$，$c_n=a_n\cdot b_n=n\cdot 2^n$.

$$
\begin{aligned}
T_n &= c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n\\
&=1\times 2+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+n\times 2^n
\end{aligned}
$$

$2T_n=\quad 1\times 2^2+2\times 2^3+\cdots+(n+1)\times 2^n+n\times 2^{n+1}$，

两式相减得：$-T_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\times 2^{n+1}=2^{n+1}-2-n\cdot 2^{n+1}$，

所以得：$T_n=2+(n-1)\cdot 2^{n+1}$ ······15 分

Ⅱ.解：(1)当 $n\ge 2$ 时，$a_n-a_{n-1}=2^{n-1}$，　代入 $n=2,3,4,\cdots$

$$
\begin{aligned}
&a_2-a_1=2^1\\
&a_3-a_2=2^2\\
&a_4-a_3=2^3\\
&\cdots\quad\cdots\\
&a_n-a_{n-1}=2^{n-1}
\end{aligned}
$$

累加得 $a_n-a_1=2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}=2^n-2$，

又知 $a_1=2$，故 $a_n=2^n$.······ 7 分

(2)由 $b_n=(\log_2 a_n)^2=n^2$，得 $c_n=(-1)^n\cdot n^2$，

所以 $c_{2n-1}+c_{2n}=-(2n-1)^2+(2n)^2=4n-1$，

故 $S_{2n}=c_1+c_2+c_3+c_4+\cdots+c_{2n-1}+c_{2n}$，

$$=(c_1+c_2)+(c_3+c_4)+\cdots+(c_{2n-1}+c_{2n})$$

$$=3+7+\cdots+(4n-1)=\frac{(3+4n-1)\cdot n}{2}=2n^2+n,$$

所以数列 $\{(-1)^n\cdot b_n\}$ 的前 $2n$ 项的和 $S_{2n}=2n^2+n$　　　……15 分

25、Ⅰ(1)由离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}\Rightarrow a=2c$，又 $a^2=b^2+c^2$，得 $b=\sqrt{3}c$，

点 $(1,\frac{3}{2})$ 在椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上，故 $\frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1$

解得 $a=2$, $b=\sqrt{3}$, $c=1$，

所得以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$。　　　……7 分

(2)直线 AB 过左焦点 $F_1(-1,0)$，且不能为 x 轴，可设为 $x=my-1$，

直线与椭圆交于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

联立得 $\begin{cases}x=my-1\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$，即 $(4+3m^2)y^2-6my-9=0$

其中 $\Delta=(-6m)^2-4\cdot(4+3m^2)\cdot(-9)=144(m^2+1)>0$

且 $y_1+y_2=\frac{6m}{3m^2+4}$，$y_1\cdot y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$，

所以 $|AB|=\sqrt{m^2+1}|y_2-y_1|=\sqrt{m^2+1}\cdot\frac{12\sqrt{m^2+1}}{4+3m^2}$，

点 F_2 到直线 AB 的距离为 $d=\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}$，

故 $S_{\Delta F_2AB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{12\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}$，

所以 $\frac{12\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}=\frac{12\sqrt{2}}{7}\Rightarrow 18m^4-m^2-17=0$，

解得：$m^2=1\Rightarrow m=\pm1$，所以直线 AB 的方程为 $x\pm y+1=0$.……15 分

Ⅱ. (1)由 ΔF_1BF_2 是等边三角形，得：$a=2c$，

又$\because a^2=b^2+c^2$，所以 $b=\sqrt{3}c$，

已知点 $B(0,\sqrt{3})$ 在椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上，故 $b=\sqrt{3}$

所以 $c=1,a=2$，

椭圆 C 的标准方程 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.…… 6 分

(2)显然点 A 不在 x 轴上，直线 AF_1 过点 $F_1(-1,0)$，可设为 $x=my-1$，

又知 $B(0,\sqrt{3})$， $F_2(1,0)$，故直线 BF_2 的方程为 $y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}$，

联立两直线解得 $\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{3}m-1}{\sqrt{3}m+1},\\ y=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}m+1}\end{cases}$，即 $M(\dfrac{\sqrt{3}m-1}{\sqrt{3}m+1},\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}m+1})$，

由 ΔMF_1F_2 与 ΔAF_1F_2 的面积之比为 $2:3$，且 M 在线段 AF 上可得：$y_A=\dfrac{3}{2}y_M=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}m+1}$，

故 $x_A=my_A-1=\dfrac{2\sqrt{3}m-1}{\sqrt{3}m+1}$，

由点 A 在椭圆上可得 $3\cdot(\dfrac{2\sqrt{3}m-1}{\sqrt{3}m+1})^2+4(\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}m+1})^2=12$，

即 $4\sqrt{3}m-11=0$，解得：$m=\dfrac{11\sqrt{3}}{12}$，故 $M(\dfrac{7}{15},\dfrac{8\sqrt{3}}{15})$ ……15 分