2023 澳门四高校联合入学考试数学考纲解读

一、考纲

1、基本概念：实数系统，集合和子集的概念；集合的运算；交集、并集、补集；韦恩图；数学归纳法。

2 、百分数：百分数的意义及其在日常生活中的应用；盈利和亏蚀、折扣、单利息和复利息、增长与折旧。

3、变分：比、比例；正变、反变、联变及部分变。

4、多项式及有理分式：多项式的运算，长除法及综合除法；因式分解；因式定理及余式定理，最高公因式及最低公倍式；平方差公式，立方和（立方差）公式，部分分式。

5、二次方程及二次函数：一元二次方程的解与判别式的关系，二次公式；根与系数的关系；二次函数的最值；配方法的应用。

6、指数及根式：指数定律；根式的简化与运算。

7、代数不等式：代数不等式和绝对不等式的运算及其解集；解一元一次或二元一次不等式组，包括用几何方法求解；线性规划问题的应用。

8、对数函数与指数函数：对数与指数的性质，换底公式，自然指数函数；在增长及衰变过程的应用（包括连续复利息）；解指数方程及对数方程。

9、非线性方程：解分式方程及无理方程。

10、排列与组合：基本概念，二项式定理。

11、数列与级数：等差数列、等比数列及前n项和；等比数列无限项之和。

12 直线图形与圆：

（A）直线图形：三角形及凸多边形内角和；直线及角的性质和定理；相似三角形，全等三角形；毕氏定理；正方形、矩形、菱形及平行四边形的性质；中位线定理及截距定理。

（B）圆：圆、弦及弧的性质；圆心角、圆周角、圆内接四边形、外接圆；弧长及扇形面积。

13、三角：角度制及弧度制的关系；三角函数与三角恒等式，复角公式及半角公式；式子$a\cos\theta+b\sin\theta$与辅助角公式；三角形面积；正弦定理，余弦定理；反三角函数的定义；含一个未知数的三角方程求解。

14、解析几何：

（A）直角坐标系，两点的距离，线段的定比分点；直线的斜率及截距，直线方程的不同表达式；两线平行与垂直。解不多于三个未知数的线性方程组。

（B）圆的标准方程，一般方程，图形与性质；椭圆、双曲线、抛物线的定义和标准方程、图形与性质。直线与圆锥曲线的相交。

15、函数图形：一次、二次及三次函数，有理函数、对数及指数函数，正弦，余弦及正切函数的描绘；对称、平移、伸展、收缩及反射等技巧的运用。

16、概率和统计：随机试验，结果与事件；概率加法规则和乘法规则；集中趋势的度量；算术平均数，众数及中位数；离散度的度量；极差，方程及标准差。

二、题型分析

澳门四高校联合入学数学考试时间为 2 小时，考题分为两部分。第一部分为单项选择（每小题含 5 个选项），共计 15 个小题总分 60 分；第一部分为解答题，共计 5 个小题 40 分，从近两年的考题看，其内容主要有以下几个方面：复利问题、概率问题、平面几何、解析几何中的直线方程、函数中的一次函数与二次函数、简单的非线性方程、代数式化简与运算。考试中可用计算器，但不准用字典。

三、近年命题分析

从近几年的真题可以看出，澳门大学入学考试数学正卷的命题以中学数学中的基本概念为主体，数学的实际应用为背景，体现了数学的来源于生活而用于生活的特性，而对数学的抽象性要求相对较低，从而有利于文史类的学生答题。结合考纲，我认为命题方面有以下几个特点：

1、注重对基本能力的考查，近几年的命题中对有理式的运算与化简、对数与指数的运算与化简、二次根式的运算与化简等都有考查；

2、近几年的命题中注重简易方程、不等式的求解，对一元二次方程、分式方程、简单的无理方程、简单的对数、指数方程都有考查；

3、注重数学知识在生活中的应用。近几年的命题中对百分数问题中的盈利和亏蚀、折扣、单利息和复利息、增长与折旧，概率问题，统计问题中的算术平均数、众数及中位数比较注重；

4、注重对平面几何知识的考查，近几年的命题中对凸多边形内角和、华氏定理、三角形面积、正方形的性质等知识都有涉及；

5、函数考查中以最基本的一次与二次函数的图象与性质为主，而淡化了相对比较复杂的指数、对数函数的性质考查；

6、解析几何中注重对直线与圆的方程的考查，重点关注直线的性质，而对难度较大的圆锥曲线没有考查；

7、三角函数方面考查了同角三角函数的基本关系，三角函数的基本定义，而对相对较复杂的和、差、倍角公式以及三角函数的图形性质与正、余弦定理没有考查；

8、数列与级数方面只考查了等差、等比的通项与求和，无穷等比数列的极限；

9、比、比例及变量内容中的变量法、联变、正变等内容进行了考查；

10、多项式中主要考查因式定理与余式定理的直接使用，因式分解，分式向部分分式的转化。

2023 澳门四高校联合入学考试数学附加卷考试大纲

一、考纲（包括考试大纲的内容，并增加以下内容）

1、函数：函数的概念、定义域及值域；图形；反函数。

2 、立体几何：简易立体图形，包括长方体、角柱、角锥、直立圆锥、球体。

3、线性方程组：不多于三个未知量；$n\times n$ 矩阵；矩阵加法及乘法（$n\leq 3$）行列式（阶数不大于三）。

4、解析几何：切线与法线；极坐标。

5、三角函数：三角函数方程及其通解。

6、基本微积分：多项式的和、差、积的微分法；极大值、极小值及拐点；多项式的不定积分；不定积分和定积分和定积分的简易性质；利用定积分计算面积。

7、曲线的描绘：偶、奇及周期函数；导数的应用。

8、矢量：纯量与二维空间中的矢量；矢量加法及纯量乘法；位置矢量；笛卡尔分量；纯量积。

9、复数：虚数；复数的运算；二次多项式的复根；复数的极式；有理指数的棣美弗定理，n 次根。

二、命题分析

澳门四高校联合入学数学科附加卷考试时间为 1 小时，本卷有五道解答题，每题二十分，任择三题作答，全卷满分六十分，如作答多于三题，只有首三题可得分。考试中可用计算器，但不准用字典。从近几年的澳门大学的考试真题与模拟试题分析，可看出其内容主要有以下几个方面：

1、立体几何：立体几何中的垂直与平行的证明；直线与平面所成的角，二面角的平面角；基本几何体的体积计算。对空间想象能力要求较高，一般需要做辅助线，如果用空间矢量法去完成，建系比较困难。

2、函数：函数的极大值、极小值及拐点，并用之做出函数图象；利用定积计算面积。

3、解析几何：直线的方程与圆的方程，直线与圆的位置关系；椭圆、双曲线、抛物线的方程，直线与圆锥曲线的相交问题，韦达定理的运用。对运算化简能力要求较高。

4、线性方程组：三个未知量的线性方程的通解；三阶行列式的运算；多项式的因式分解。

5、复数：复数的极式；有理指数的棣美弗定理及其在三角恒等式的证明中的运用。

6、数列与级数：等差、等比的通项，数列的求和，数学归纳法的运用。

2023 届澳门四校联考数学　第一讲

多项式、部分分式

知识简介：

多项式的运算，长除法及综合除法；因式分解；因式定理及余式定理，最高公因式及最低公倍式；部分分式。

因式定理：多项式$x-a$是多项式$f(x)$的一个因式$\Leftrightarrow$ $f(a)=0$

余式定理：多项式$x-a$除多项式$f(x)$所得余式为r $\Leftrightarrow$ $f(a)=r$

部分分式概念：

已知 n 次多项式$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots\cdots(x-x_n)$和 m 次多项式$g(x)$，其中$m<n$，

若$\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{A_1}{x-x_1}+\dfrac{A_2}{x-x_2}+\cdots+\dfrac{A_n}{x-x_n}$，$A_1, A_2, \cdots, A_n$为实常数，

称$\dfrac{A_1}{x-x_1}+\dfrac{A_2}{x-x_2}+\cdots+\dfrac{A_n}{x-x_n}$为分式$\dfrac{g(x)}{f(x)}$的部分分式.

典例分析：

例 1、求多项式$f(x)=2x^4-7x^3+16x^2-15x+15$除以多项式$g(x)=x^2-2x+3$所得的商式$\varphi(x)$和余式$r(x)$。

例 2、用常除法求多项式$2x^4+14x+4-7x^3$除以多项式$x-2$所得的商式和余式.

例 3、若以 x^2+2x-3 除多项式 $f(x)$，得余式 $x+1$，则 $f(-3)=$________.

例 4、$x^7-100x+10$ 除以 $x+2$ 的余式为：______.

例 5、若 $2x+1$ 是多项式 $f(x)=8x^5-4x^3+x^2+3x+a$ 的因式，则 $f(x)$ 除以 $x-2$ 的余式是________.

例 6、若以 $2x^2-3x-2$ 除多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$，分别得余式 $2x+3$ 与 $4x-1$，则以 $2x+1$ 除 $f(x)-g(x)$ 所得的余式为________.

例 7、若 x^3+x^2+ax+b 可被 $x-2$ 整除， 而被 $x+2$ 除的余数为 12，求 a 和 b，并求方程式 $x^3+x^2+ax+b=0$ 的根。

例 8、设多项式 $f(x)$ 以 $x-1$ 除之余式为 2，以 $x+2$ 除之余式为 3，则 $f(x)$ 以 x^2+x-2 除之余式为______.

例 9、以 x^2+1 除多项式 x^8-4x^3+2x-1 所得余式为______.

例 10、设 $f(x)=x^3+Ax^2-4x+A$。当 $f(x)$ 除以 $2x-1$ 时，其余数为 5。

(1) 求 A 的值。

(2) 求当 $f(2x-1)$ 除以 $2x-1$ 时的余数。

例 11、P 和 Q 的 最大公因式为 $10x^2(x+1)^3(x-1)$， A 和 B 的 最大公因式为 $4x^3(x+1)^2$，P、Q、A 和 B 的最大公因式是（　　）

A. $2x^3(x+1)^3$　　B. $2x^2(x+1)^2$　　C. $2x^3(x+1)^3(x-1)$

D. $2x^3(x+1)^3(x-1)$　　E. $2x^2(x+1)^2(x-1)$

例 12、若 $f(x)=x^4+2x^3-2x^2+2x-3$， $g(x)=2x(x+3)(x-1)$，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 之最高公因式为 ______；

例13、设实数 x 适合 $x^2=-x+1$。求两个整数 a 及 b，使 $x^5=a\cdot x^2+b$

例 14、化 $\dfrac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ 为部分分式.

例 15、把分式 $\dfrac{3x-2}{x^2-5x-6}$ 化为部分分式。

例 16、把分式 $\dfrac{x^4-6x^2+x+7}{x^2+x-2}$ 化为部分分式。

课后练习：

1、设a和b为常数。若x^3+ax^2+2x+b可被$x+2$整除，求$8a+2b$。（　　）

A. 24　　B. 12　　C. 6　　D. -8　　E. -12

2、对于整数a，设a^2 为奇数。下列何者必为正确?（　　）

I. a为奇数。　　II. a^4为奇数。　　III. $(a+1)^2$为奇数。

A. 只有 I。　　B. 只有 II。　　C. 只有 I 和 II。

D. 只有 II 和 III。　　E. I，II 及 III。

3、 若a可被 3 整除及b可被 5 整除，下列何者必为正确？（　　）

I. a 和b为奇数(单数)　　II. $a+b$ 可被 8 整除　　III. ab可被 15 整除

A. 只有 I　　B. 只有 II　　C. 只有 III

D. 只有 I 及 III　　E. 只有 II 及 III

4、P 和 Q 的 最大公因式为 $6a^2bc^2$。 A、B 和 C 的 最大公因式为 $4ab^2$ (a、b 和 c 为整数），P、Q、A、B 和 C 的最大公因式是（　　）

A. $24a^3b^3c^2$　　B. $24a^2b^2c^2$　　C. $12a^2b^2c^2$　　D. $2abc$　　E. $2ab$

5、若$f(x)=x^2-kx+2$能被$x-2$整除，求$f(x)$ 除以 $x+1$的余数。（　　）

A. 0　　B. 2　　C. 4　　D. 6　　E. 8

6、设$f(x)$和$g(x)$为多项式。若 $f(2)=g(2)$，则以下那项必定正确？（　　）

I. $f(x)$和$g(x)$皆可被$x-2$整除　　II. $f(x)-g(x)$可被$x-2$整除

III. $f(x)+g(x)$可被$x-2$整除

A. 只有 I　　B. 只有 II　　C. 只有 I 和 II

D. 只有 I 和 III　　E. I、II 和 III

7、若多项式$4x^2+5x-7$ 除以$x+k$ 的余数是$5k-1$，其中$k>0$，求商式。（　）

A. $4x-7$　　B. $4x-5$　　C. $4x+5$　　D. $4x-3$　　E. $4x+3$

8、设 $f(x)$为x的多项式。当$f(x+1)$除以$2x-3$时，余数是（　　）

A. $f(-\frac{3}{2})$　　B. $f(-\frac{1}{2})$　　C. $f(\frac{1}{2})$　　D. $f(\frac{3}{2})$　　E. $f(\frac{5}{2})$

9、设 $f(x)=ax^2-4x+b$ ，其中 a 和 b 为常数。

(1)已知 $f(x)$ 可被 $x-2$ 整除。当 $f(x)$ 除以 $x+1$ 时，余数为 3。求 a 和 b 的值。

(2) 求 $f(x)$ 除以 x 的余数。

10、当 $f(x)=ax^3-13x^2+bx-60$ 除以 $3x^2-14x-5$ 时，余式是 $7x-35$。

(1) 求 a 及 b。

(2) 因式分解 $f(x)$。

11.化 $\dfrac{11x-5}{x^2+x-2}$ 为部分分式.

12、将 $\dfrac{x^4+5x^3+2x-1}{(x+1)(x-1)}$ 化为部分分式和。

第一讲　多项式、有理分式及数学归纳法课后练习答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	C	E	D	B	A	E

9、解：(1) 由余式定理与因式定理可知：$\begin{cases} f(2)=0 \\ f(-1)=3 \end{cases}$，故$\begin{cases} 4a+b=8 \\ a+b=-1 \end{cases}$，解得：$\begin{cases} a=3 \\ b=-4 \end{cases}$

(2) $\because$ $f(0)=b$，由余式定理知，$f(x)$除以 x的余数为$r=f(0)=b$

10、解： (1) 由长除法，可知$\begin{cases} 125a+5b=385 \\ -\dfrac{a}{27}+\dfrac{13}{9}-\dfrac{b}{3}-60=-\dfrac{112}{3} \end{cases}$，

化简得：$\begin{cases} 25a+b=77 \\ a+9b=651 \end{cases}$，解得：$\begin{cases} a=6 \\ b=-73 \end{cases}$

(2) 由(1) $f(x)=6x^3-13x^2-73x-60$，观察可知 $f(5)=0$ ，故 $f(x)$有因式$(x-5)$，

由长除法可得：$f(x)=6x^3-13x^2-73x-60=(x-5)(6x^2+17x+12)=(x-5)(3x+2)(2x+3)$

即：$f(x)=(x-5)(3x+2)(2x+3)$

11.解：设$\dfrac{11x-5}{x^2+x-2}=\dfrac{11x-5}{(x+2)(x-1)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+2}=\dfrac{(A+B)x+2A-B}{(x+2)(x-1)}$，$\begin{cases} A+B=11 \\ 2A-B=-5 \end{cases}$，得$\begin{cases} A=2 \\ B=9 \end{cases}$

所以$\dfrac{11x-5}{x^2+x-2}=\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{9}{x+2}$

12、解：利用长除法，x^4+5x^3+2x-1除以$(x+1)(x-1)=x^2-1$，得商x^2+5x+1，余式为$7x$

故$\dfrac{x^4+5x^3+2x-1}{(x+1)(x-1)}=x^2+5x+1+\dfrac{7x}{(x+1)(x-1)}$，　设$\dfrac{7x}{(x+1)(x-1)}$的部分分式为，$\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}$，

通分比较等式的两边的项，$\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}=\dfrac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{(A+B)x+(A-B)}{(x-1)(x+1)}$

故$\begin{cases} A+B=7 \\ A-B=0 \end{cases}$，解得：$A=\dfrac{7}{2}$，$B=\dfrac{7}{2}$.

$$\therefore \quad \frac{x^4+5x^3+2x-1}{(x+1)(x-1)}=x^2+5x+1+\frac{7}{2(x+1)}+\frac{7}{2(x-1)}$$

2023 届澳门四校联考数学　第二讲

数学归纳法

知识简介：

1. **数学归纳法证明的步骤：**

一般地，证明一个与正整数 n 有关的命题，可按下列步骤进行：

(1)(归纳奠基)证明当 n 取第一个值 $n_0(n_0\in\mathbf{N}^*)$时命题成立；

(2)(归纳递推)假设 $n=k(k\geq n_0，k\in\mathbf{N}^*)$时命题成立，证明当 $n=k+1$ 时命题也成立．

2．辨明两个易误点

(1)数学归纳法证题时，误认为 n_0 是 1，如证明多边形内角和定理$(n-2)\pi$ 时，初始值 $n_0=3$.

(2)数学归纳法证题的关键是第二步，证题时应注意：

①必须利用归纳假设作基础；②证明中可利用综合法、分析法、反证法等方法；③解题时要搞清从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 增加了哪些项或减少了哪些项.

典例分析：

例 1、用数学归纳法证明“$(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdot(n+n)=2^n\cdot1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)$”，从“$k$ 到 $k+1$”左端需增乘的代数式为

A.$2k+1$　　B.$2(2k+1)$　　C.$\dfrac{2k+1}{k}$　　D.$\dfrac{2k+3}{k+1}$　　E.$\dfrac{2k+1}{k+1}$

例 2、已知数列$\{a_n\}$满足$a_3=7$，且对于任意$n\in N^+$，$2na_{n+1}-(2n+1)a_n-3n-2=0$恒成立.

(1)求a_1 , a_2 ;

(2)求数列$\{a_n\}$的通项公式.

例 3、已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\dfrac{(n+1)\cdot(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}$，记数列$\{a_n\}$的前$n$项之和为$S_n$.

(1)若已知$S_n=\dfrac{(-1)^n}{a\cdot n+b}-\dfrac{1}{12}$，利用待定系数法求$a,b$；

(2)利用数学归纳法证明(1)中的S_n是正确的.

例 4、证明不等式

$$(\lg 2-\lg 3)+(\lg 4-\lg 5)+\cdots+[\lg(2n)-\lg(2n+1)]>\frac{1}{2}\lg(2n+3)-\lg(2n+2)$$

对任意正整数 n 都成立.

例 5、(1) 设 x, y 和 k 都是整数，证明若 x 和 y 都可被 6 整除，则 $x+ky$ 也能被 6 整除。

(2)利用数学归纳法证明对所有的正整数 n，都有 $2n^3-3n^2+7n$ 能被 6 整除。

例 6、利用数学归纳法证明平面上任意凸 n 边形 $(n \geq 4)$ 的对角线的数量为 $\frac{1}{2}n(n-3)$.

例7、(1) 用数学归纳法，证明对任意正整数n，

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(2) 用(1)的结果，对任意正整数m，求

① $2^2+4^2+\cdots+(2m)^2$，

② $1^2+3^2+\cdots+(2m-1)^2$.

课后练习：

1、用数学归纳法，证明对任意正整数n，有$1^3+2^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

2、(1) 用数学归纳法，证明对任意正整数n，

$1^2\times 2+2^2\times 3+\cdots+n^2(n+1)=\dfrac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+1)$.

(2) 推导出对任意正整数n，$n(n+1)(n+2)(3n+1)$可被24整除.

3．求证：$(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+n)=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)(n\in\mathbf{N}^*)$.

4．设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足$S_n=2na_{n+1}-3n^2-4n$，$n\in\mathbf{N}^*$，且$S_3=15$.

(1)求a_1，a_2，a_3的值；

(2)求数列$\{a_n\}$的通项公式.

第二讲　数学归纳法课后练习答案

1、证明：i 当$n=1$时，左边$=1=$右边，即$n=1$时原命题成立；

ii 假设，当$n=k\ (k\geq 1)$时，原命题成立，即$1^3+2^3+\cdots k^3=\dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$成立；

当$n=k+1$时，左边$=1^3+2^3+\cdots k^3+(k+1)^3=\dfrac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3$

$$=\frac{(k+1)^2[k^2+4(k+1)]}{4}=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

右边$=\dfrac{(k+1)^2[(k+1)+1]^2}{4}=\dfrac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$

故左边$=$右边，即当$n=k+1$时，原命题也成立。

综合(i)，(ii),由数学归纳法原理，可知对任意正整数n都有：$1^3+2^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$。

2、证明：i 当$n=1$时，左边$=2=$右边，即$n=1$时原命题成立；

ii 假设，当$n=k\ (k\geq 1)$时，原命题成立，

即$1^2\times 2+2^2\times 3+\cdots+k^2(k+1)=\dfrac{1}{12}k(k+1)(k+2)(3k+1)$成立；

当$n=k+1$时，左边$=1^2\times 2+2^2\times 3+\cdots+k^2(k+1)+(k+1)^2(k+2)$

$=\dfrac{1}{12}k(k+1)(k+2)(3k+1)+(k+1)^2(k+2)=\dfrac{1}{12}(k+1)(k+2)[k(3k+1)+12(k+1)]$

$=\dfrac{1}{12}(k+1)(k+2)[3k^2+13k+12]$

右边$=\dfrac{1}{12}(k+1)(k+2)(k+3)[3(k+1)+1]=\dfrac{1}{12}(k+1)(k+2)[3k^2+13k+12]$

故左边$=$右边，即当$n=k+1$时，原命题成立。

综合(i)，(ii),由数学归纳法原理，可知对任意正整数n都有：

$$1^2\times 2+2^2\times 3+\cdots+n^2(n+1)=\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+1)。$$

(2) 证明：由于$n\cdot(n+1)$一定是偶数，故$1^2\times 2+2^2\times 3+\cdots+n^2(n+1)$也是偶数，可记为$2t\ ,t\in Z$，

由(1)的证明可知：$1^2\times 2+2^2\times 3+\cdots+n^2(n+1)=\dfrac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+1)$

故 $n(n+1)(n+2)(3n+1)=12[1^2\times 2+2^2\times 3+\cdots+n^2(n+1)]=24t$, $t\in Z$

即对任意正整数 n ， $n(n+1)(n+2)(3n+1)$ 可被24整除.

3． 证明：(1)当 $n=1$ 时，等式左边＝2，右边＝2，故等式成立；

(2)假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*,\ k\geqslant 1)$ 时等式成立，

即 $(k+1)(k+2)\cdot\ldots\cdot(k+k)=2^k\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2k-1)$，

那么当 $n=k+1$ 时，

左边 $=(k+1+1)(k+1+2)\cdot\ldots\cdot(k+1+k+1)$

$=(k+2)(k+3)\ldots(k+k)(2k+1)(2k+2)$

$=2^k\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2k-1)(2k+1)\cdot 2$

$=2^{k+1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2k-1)(2k+1)$.

这就是说当 $n=k+1$ 时等式也成立.

由(1)(2)可知，对所有 $n\in\mathbf{N}^*$ 等式成立.

4． 解：(1)由题意知 $S_2=4a_3-20$，所以 $S_3=S_2+a_3=5a_3-20$.

又 $S_3=15$，所以 $a_3=7$，$S_2=4a_3-20=8$.

又 $S_2=S_1+a_2=(2a_2-7)+a_2=3a_2-7$，

所以 $a_2=5$，$a_1=S_1=2a_2-7=3$.

综上知，$a_1=3$，$a_2=5$，$a_3=7$.

(2)由(1)猜想 $a_n=2n+1$，下面用数学归纳法证明.

①当 $n=1$ 时，结论显然成立；

②假设当 $n=k(k\geq 1)$ 时，$a_k=2k+1$，

则 $S_k=3+5+7+\ldots+(2k+1)=\dfrac{k[3+(2k+1)]}{2}=k(k+2)$.

又 $S_k=2ka_{k+1}-3k^2-4k$，

所以 $k(k+2)=2ka_{k+1}-3k^2-4k$，

解得 $2a_{k+1}=4k+6$，

所以 $a_{k+1}=2(k+1)+1$，即当 $n=k+1$ 时，结论成立.

由①②知，对于 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_n=2n+1$.

2023 届澳门四校联考数学　第三讲

数列与数列极数

知识简介：

1、等差数列的通项公式与前 n 项和公式

2、等比数列的通项公式与前 n 项和公式

3、无穷递缩等比数列的和与数列极限

4、等差中项与等比中项

5、裂项相消法求数列的前 n 项之和

典例分析：

例 1、数列 $\cdots,a,b,c,d,0,1,1,2,3,5,8,\cdots$ 的每一项为其左面前两项之和。求 a。

A. 0　　B. 1　　C. 3　　D. －1　　E. －3

例 2、若 a、b、c 为某等差数的 3 个连续项，下列何者必为正确?

I. $a+3$、$b+3$、$c+3$ 为一等差数的连续项。

II. $3a$、$3b$、$3c$ 为一等差数的连续项。

III. $\lg a$、$\lg b$、$\lg c$ 为一等比数的连续项。

A. 只有 I　　B. 只有 I 及 II　　C. 只有 I 及 III

D. 只有 II 及 III　　E. I、II 及 III

例 3、有一个 201 项的等差数 a_1，a_2，a_3，$\cdots$，a_{201}，其和为 0，且 $a_{181}=92$。问下列哪些选项是正确？

I. $a_1+a_{201}>0$　　II. $a_2+a_{200}<0$

III. $a_3+a_{199}=0$　　IV. $a_{101}=32$　　V. $a_{22}<0$

A. 只有 I 和 III　　B. 只有 II　　C. 只有 III 和 V

D. 只有 IV　　E. 只有 I 、III 和 IV

例 4、等差数列 22、18、14、⋯ 的首 n 项之和为 64，求 n 值。

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 4 或 6　　E. 4 或 8

例 5、等差数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 中，$a_1+a_2+a_3=-24$，$a_{18}+a_{19}+a_{20}=78$，则此数列前 20 项的和为.

A. 160　　B. 180　　C. 200　　D. 220　　E. 240

例 6、等比数 $6,3,\frac{3}{2},\frac{3}{4}\cdots$的第 n 项为

A. $\frac{1}{3(2^{n-1})}$　　B. $\frac{3}{2^{n-1}}$　　C. $\frac{3}{2^n}$　　D. $\frac{1}{3(2^{n-2})}$　　E. $\frac{3}{2^{n-2}}$

例 7、有一等差数列其首项为 a 及第三项为 b。设 S_n 为其首 n 项之和。若 S_4 ,S_5,S_7 为一等比数列的相邻项，则

A. $28a^2=25b^2$　　B. $16a^2=7b^2$　　C. $11a^2=10b^2$

D. $7a^2=13b^2$　　E. $28a=25b$

例 8、如果等比数列的第 4 项是 a，第 8 项是 b，则第一项为

A. $a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}$　　B. b　　C. $a^{\frac{7}{4}}b^{\frac{3}{4}}$　　D $a^{\frac{7}{4}}b^{-\frac{3}{4}}$　　E. $a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{3}{4}}$

例 9、若数序 $k+k^2+k^3+\cdots$的无限项之和是$\frac{1}{2}$，求 k。

A. 无解　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$或 1　　E. $\frac{1}{3}$或 1

例10、若 $x>0$，则 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot x}{(x+1)^n}=$

A. $\frac{x^2+x}{x+2}$　　B. $-\frac{x^2+x}{x+2}$　　C. $x+1$　　D. $\frac{x}{x+2}$　　E. x^2+x

例 11、若 $3.\dot{9}$ 表示无限循还小数 3.9999⋯⋯，则下列命题有那些是正确的?

I. $3.\dot{9}<4$　　II $3.\dot{9}=4$

III. $3.\dot{9}$ 的整数部份为 3　　IV. $3.\dot{9}$ 的整数部份为 4

A. 只有 I 和 III　　B. 只有 I　　C. 只有 II

D. 只有 II 和 IV　　E. A、B、C、D 都不正确

例 12、设 $S=\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4225}+\sqrt{4224}}$，以下项目有那些是正确的？

I. S 被 13 整除　　II. S 不是整数

III. $30<S<40$　　IV. S 被 8 整除

A. 只有 I　　B. 只有 II　　C. 只有 III

D. 只有 IV　　E. 只有 II 和 III

例 13、已知数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1(n\geq 1)$。

(1)求 a_2，a_3，a_4，a_5；

(2)试写出该数列的第 n 项 a_n 与 n 的关系式，并用数学归纳法证明之。

(3)记 $b_n=\frac{1}{\log_2(a_n+1)\cdot\log_2(a_{n+2}+1)}$，求数列 $\{b_n\}_{n\geq 1}$ 的前 n 项之和。

课后练习：

1、已知 p,q,r,s 为一等差数列的四个连续项。若 $p+q=13$ 及 $r+s=25$ 。求该数列的公差。

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6　　E. 7

2、某数列的通项是 $3n+3\quad(n=1,2,3,\cdots)$，以下那项是正确的？

Ⅰ 数列的每项皆可被3整除；　Ⅱ 数列的每项皆是正数；　Ⅲ 数列的第1000项大于1000。

A.只有 I　B.只有 I 和 II　C.只有 I 和 III　D.只有 II 和 III　E.I、II 和 III

3、若 2、w、x、6、y、z 为一等比数列中的六个连续项，则 $y\cdot z=$

A. 48　　B. 72　　C. 108　　D. 144　　E. 288

4、以下哪项是等比数列 ？

Ⅰ x^7，x^5，x^3，$x\cdots\cdots$ $(x\neq 0)$

Ⅱ $\sin 90°$，$\sin 270°$，$\sin 450°$，$\sin 630°\cdots\cdots$

Ⅲ 1 ，1.1 ，1.11 ，1.111 ……

A.只有I　B.只有III　C.只有I 和II　D.只有II和III　E. I、II 和III

5、若 $\sum_{n=1}^{\infty}(3-c)^{-n}=\frac{1}{3-c}+\frac{1}{(3-c)^2}+\cdots=4$，求常数 c 的值.

A. $\frac{3}{2}$　B. $\frac{8}{3}$　C. $\frac{5}{3}$　D. $\frac{7}{4}$　E. 以上皆不对

6、若 $0<x<1$, 则 $1-x^2+x^4-x^6+\cdots=$

A. $\frac{1}{1-x}$　B. $\frac{1}{1+x^2}$　C. $\frac{1}{1-x^2}$　D. $1-x^2$　E. $1+x^2$

7、若等差数列$\{a_n\}_{n\ge1}$满足$a_3=5$, $a_5=9$，则数列$\left\{\dfrac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}\right\}$的前$n$项之和为

A.$\dfrac{2n}{2n+1}$　　B.$\dfrac{n+1}{2n+3}$　　C.$\dfrac{n}{2n+1}$　　D.$\dfrac{2+2n}{2n+3}$　　E.以上皆不对

8、在数列$\{a_n\}_{n\ge1}$中，已知$a_1=-1$，$a_n+a_{n+1}+4n+2=0$.

(1) 若$b_n=a_n+2n$，求证：$\{b_n\}_{n\ge1}$ 为等比数列，并写出$\{b_n\}_{n\ge1}$ 的通项公式；

(2) 求$\{a_n\}_{n\ge1}$的通项公式.

第三讲　数列与数列极数课后练习答案

题号	1	2	3	4	5	6	7
答案	A	E	C	C	D	B	C

8、(1) 证明：$\because\ b_n=a_n+2n$，　又由已知 $a_n+a_{n+1}+4n+2=0\Rightarrow a_{n+1}=-a_n-4n-2$

$\therefore\ b_{n+1}=a_{n+1}+2(n+1)=-a_n-4n-2+2(n+1)=-a_n-2n$

$\therefore\ \dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{-a_n-2n}{a_n+2n}=-1$，且 $b_1=a_1+2=1\neq 0$，

$\therefore\{b_n\}$ 为等比数列，且公比 $q=-1$，故$\because\ b_n=b_1\cdot q^{n-1}=(-1)^{n-1}$；

(2) 由(1)知$\because\ b_n=(-1)^{n-1}$，且 $b_n=a_n+2n$，故 $a_n=b_n-2n=(-1)^n-2n$

2023 届澳门四校联考数学　第四讲

计数原理、二项式定理、概率与统计

知识简介：

1、分类加法与分步乘法原理

2、排列与组合

3、二项式 $(a+b)^n$ 的展开式中某一项系数

4、二项式定理在求余数中的应用

5、古典概型

6、互斥事件与对立事件

7、互斥事件至少有一个发生的概率（概率加法原理）

8、相互独立事件同时发生的概率（概率乘法原理）

9、独立重复实验

10、平均数、中位数、众数、方差、标准差、极差

典例分析：

例 1、在 $(2x+\frac{3}{x})^{20}$ 的展开式中，x^4 的系数为

A. $C_{20}^{4}\cdot 2^4\cdot 3^{16}$　　B. $C_{20}^{10}\cdot 2^{10}\cdot 3^{10}$　　C. $2^4\cdot 3^{16}$　　D. $C_{20}^{12}\cdot 2^8\cdot 3^{12}$　　E. $C_{20}^{8}\cdot 2^{12}\cdot 3^8$

例 2、在 $(1+x^2)\cdot(1-2x^2)^{12}$ 的展开式中，x^8 的系数是

A. 6160　　B. 8712　　C. 17424　　D. -1496　　E. -1760

例 3、在 $(x-2x^2-x^3)^{10}$ 的展开式中，x^{12} 的系数是

A. −10　　B. −170　　C. 170　　D. 180　　E. 190

例 4、若 $4^{2023}+n$ 能被 25 整除，则满足条件的最小正整数 n 的值为

A.1　　B. 4　　C. 11　　D.14　　E. 21

例 5、若 1.02^{25} 的近似值为(保留到 0.01)

A.1.61　　B. 1.62　　C. 1.63　　D.1.64　　E. 1.65

例 6、求以 0、1、2、3、4 数字组成的一位、二位、三位、四位或五位正整数的数目。这里，每个数字于每个组成的数中可重复出现。注意：除一位数 0 外，这些整数的首位数都不可以是零。

A. 1024　　B. 1275　　C. 3125　　D. 3905　　E. 4325

例7、一组 n 个数的平均数是 m，若从这组数据移走 $-1, 4, 12$ 三项，余下的 $n-3$ 个数的平均数不变，求 m 的值。

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5　　E. 6

例 8、某公司的员工每月薪金的平均值和标准差分别是$2,000 和$400。如果所有员工的薪金都增加 20%，求新的标准差。

A. $\$227\frac{7}{9}$　　B. $\$333\frac{1}{3}$　　C. $400　　D. $480　　E. $560

例 9、投掷一均称的骰子两次，求最少掷得一次“6”的概率。

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $\frac{5}{18}$　　D. $\frac{11}{36}$　　E. $\frac{25}{36}$

例 10、从 0、2、4、6、8 中取出 2 个数字，从 1、3、5、7、9 中取出 3 个数字构成无重复数字的五位数。

⑴ 能构成多少个不同的五位偶数？

⑵ 能构成多少个不同的能被 5 整除的五位数？

例 11、A、B、C、D、E 五个同学站成一排拍照

⑴ A 不站在两端的概率是多少？

⑵ A、B 两个同学相邻的概率是多少？

⑶ C 不站在两端节，且 A、B 两个同学相邻的概率是多少？

例 12、八张卡片分别印有数字 1、1、1、2、2、3、4 及 5。若从这些卡片随机抽出两张，而已抽取的卡片不会放回其余的卡中。求下列各情况出现的概率：

⑴ 两张卡片上的数字相同。

⑵ 两张卡片上的数字总和为 9。

⑶ 两张卡片上的数字总和为 4。

例 13、下列为 10 名学生在某次数学测验中所取得的分数:

76 90 78 75 68 72 50 65 62 64

求以上分数的平均值，中位数及标准差。

例 14、三名学生 A、B 和 C 同时申请入读某大学。他/她们能成功被大学录取的概率分别为 0.2、0.3 和 0.4。求以下事件的概率。

⑴ 三名学生全部被拒绝录取。

⑵ 只有其中一名学生被录取。

例15、某次小测共设三道选择题，每题有四个选择，只有一个选择正确，答对最少两题方可合格。嘉敏温习了测验范围的70%，所以她懂得作答一道题的概率是70%。若她懂得作答，她大意犯错的概率是10%，若她不懂得作答，她会随意选择一个答案。

⑴ 求嘉敏答对某一道题的概率；

⑵ 求嘉敏在测验中及格的概率。

例 16、A 盒载有一个黑球和三个白球，B 盒载有两个白球和三个红球。若从 A 盒中随机抽取一球放入 B 盒内，然后又从 B 盒内随机抽取一球放入 A 盒内， 求下列各项事件的概率

⑴ A 盒内有一个红球，

⑵ 黑球仍在 A 盒内。

例 17、在投掷两颗均称的骰子时，若两颗骰子的点数相同，我们便称之爲“围骰”。

⑴ 求投掷两颗骰子一次而取得“围骰”的概率。

⑵ 求连续投掷两颗骰子三次，只得一次“围骰”的概率。

课后练习：

1、在 $(2x-x^2)^{12}$ 的展开式中， x^{15} 的系数是

A. 1,584　B. −1,584　C. −1,760　D. − 32,650　E. −112,640

2、在 $(2x-3x^3)^{10}$ 的展开式中，x^{16} 的系数是

A. 3456　B.207,360　C.−207,360　D.−414,720　E.−103,680

3、 2^{666} 除以 9 的余数为

A. 1　B. 3　C. 5　D.7　E. 8

4、在由数字 1，2，3，4，5 组成的所有没有重复数字的 5 位数中，大于 23145 且小于 43521 的数共有（　　）个.

A.56　B. 57　C. 58　D.60　E. 72

5、一家医院某天出生了 3 个婴儿，假设生男生女的机会相同，那么这 3 个婴儿中，出现 1 个男婴、2 个女婴的概率是（　　）

A. $\frac{1}{3}$　B. $\frac{3}{8}$　C. $\frac{2}{5}$　D. $\frac{1}{4}$　E. $\frac{3}{5}$

6、某三位数由 3、6 及 x 这三个数字组成，已知 x 是 1 至 9 中的一个数字，求该三位数可被 6 整除的概率。

A. $\frac{1}{6}$　B. $\frac{2}{15}$　C. $\frac{4}{27}$　D. $\frac{5}{48}$　E. $\frac{2}{5}$

7、投掷一匀称的骰子两次。求第一次掷得的点数小于第二次掷得的点数的概率。

A. $\frac{1}{2}$　B. $\frac{5}{12}$　C. $\frac{1}{4}$　D. $\frac{7}{12}$　E. $\frac{1}{6}$

8、若一组数据为 1.7、1.7、1.7、2.1、2.1 及 3.9，则 2.2 是该组数据的

I. 中位数；　II. 平均数；　III. 极差 (分布域)。

A. 只有 I　B. 只有 II　C. 只有 III

D. 只有 II 及 III　E. I、II 及 III

9、某中国茶由三种茶叶按重量比比率 3 : 5 : 4 混合而成，而三种茶叶的成本价则分别为每公斤$27、$39 及 $45，求该中国茶叶每公斤的成本价。

A. $36　B. $37　C. $38　D. $39　E. $40

10、若 10、24、15、13、a、a 的平均值为 14，求以上 6 个数字的中位数。

A. 11　　B. 12　　C. 13　　D. 14　　E. 15

11、在有 5 个人的组别中，最少有两个人在同月同日出生的概率为多少？假设每年有 365 天。

A. 0.016　　B. 0.027　　C. 0.035　　D. 0.087　　E. 0.102

12、在 5 件产品中，有 3 件一等品和 2 张二等品，从中任取 2 件，那么以 $\frac{7}{10}$ 为概率的事件是（　　）

A. 都不是一等品　　B.都是一等品　　C. 恰有一件一等品

D. 至少有一件一等品　　E. 至多一件一等品

13、一批产品有18件合格品与3件次品，从这20件产品中任意抽出4件

(1) 抽出的4件产品中恰有1件是次品的概率是多少？

(2) 抽出的4件产品最少有3件是合格品的概率是多少？

14、以下数据所示为 9 款不同型号手提电话的售价:

\$2,130　\$3,250　\$4,760　\$1,800　\$2,770　\$6,050　\$2,340　\$1,980　\$1,560

求该组数据的 (1) 平均数， (2) 中位数， (3) 标准差。

15、A 盒载有一个黑球和三个白球，B 盒载有三个黑球和两个白球。若从 A 盒中随机抽取一球放入 B 盒内，然后又从 B 盒内随机抽取一球，求以下事件的概率:

(1) 抽出的两个球皆为白色，

(2) 第二个抽出的球为白色。

第四讲　计数原理、二项式定理与古典概型

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	E	D	A	C	B	D	B	D	C	B	B	E

13、解析：总的基本事件个数为：$n=C_{20}^{4}$

⑴ 事件A:“抽出的4件产品中恰有1件是次品”包含的基本事件个数为：$C_{17}^{3}\cdot C_{3}^{1}$

故$P(A)=\dfrac{C_{17}^{3}\cdot C_{3}^{1}}{C_{20}^{4}}=\dfrac{8}{19}$

⑵ 事件B:“抽出的4件产品最少有3件是合格品”分为两个类别：

B_1:“3 件合格品 1 件次品”，这就是事件A，故包含的基本事件个数为：$C_{17}^{3}\cdot C_{3}^{1}$

B_2:“4 件合格品”，包含的基本事件个数为：C_{17}^{4}

故$P(B)=\dfrac{C_{17}^{3}\cdot C_{3}^{1}+C_{17}^{4}}{C_{20}^{4}}=\dfrac{52}{57}$

14、解：⑴ 平均数：$\bar{x}=\dfrac{2130+3250+4760+1800+2770+6050+2340+1980+1560}{9}=2960$

⑵ 中位数：把所有的 9 个数据从小到大（或从大到小）排列，位于正中间（第 5 位）

的为中位数，故中位数为2340

⑶ 标准差：$s=\sqrt{\dfrac{1}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\sqrt{\dfrac{1}{9}\cdot\sum\limits_{i=1}^{9}(x_i-\bar{x})^2}\approx 1345.3$

15、解：⑴ 即从A到B时，抽取出的是白球，且从B中抽出的是白球，$P=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{6}=\dfrac{3}{8}$

⑵ 从A到B时，抽取出的是黑球，且从B中抽出的是白球，则$P_1=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{6}=\dfrac{3}{8}$

从A到B时，抽取出的是白球，且从B中抽出的是白球，则$P_2=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{12}$

故第二个抽出的球为白色的概率为$P=P_1+P_2=\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{11}{24}$。

2023 届澳门四校联考数学　第五讲

变量法、百分比问题

知识简介：

一、变量法

1.正变：y 随 x 而正变（y 正比与 x）的意思是 $y=kx$，其中 k 为一非零常数，记为 $y\propto x$

2.反变：y 随 x 而反变（y 反比与 x）的意思是 $y=\frac{k}{x}$，其中 k 为一非零常数，记为 $y\propto\frac{1}{x}$

3.联变：若一个变量 z 随其他两个变量（如 x 及 y），或更多个变量而变，这关系称之为联变。

（例如：若 z 随 x 及 y^2 的积而正变，则可记为 $z=k\cdot x\cdot y^2$，其中 k 为一非零常数）

4.部分变：⑴变量 z 的一部分为常数而另一部分随 x 而正变或反变。

①若一个变量 z 的一部分为常数而另一部分随 x 而正变，则 $z=c+kx$，其中 c 为常数，而 k 为变分常数；

②若一个变量 z 的一部分为常数而另一部分随 x 而反变，则 $z=c+\frac{k}{x}$，其中 c 为常数，而 k 为变分常数。

⑵变量 z 的一部分随 x 而变，另一部分随 y 而变。

③变量 z 的一部分随 x 而正变，另一部分随 y 而正变，则 $z=k_1x+k_2y$，其中 k_1, k_2 为变分常数；

④变量 z 的一部分随 x 而正变，另一部分随 y 而反变，则 $z=k_1x+\frac{k_2}{y}$，其中 k_1, k_2 为变分常数；

二、百分比问题

1、增长率(或降低率)的计算公式：在存在基础量 a 的前提下，若连续增长（或降低）n 次，且平均增长（或降低）率为 x，则增长后的数量为 $a(1+x)^n$（或降低后的数量为 $a(1-x)^n$）；

2、记本金为 a，每期利率为 r，期数为 n，

每期的单利息＝$a\cdot r$，　n 期的单利息和＝$n\cdot a\cdot r$，

n 期的复利息总和＝$a(1+r)^n-a$；　n 期的连续复利息总和＝$a\times e^{n\cdot r}-a$

3、利润问题：

折扣：售价＝标价×折扣率　　　利润率＝$\frac{\text{售价}-\text{进价}}{\text{进价}}\times 100\%$。

典例分析：

例 1、设 $y-2$ 随 x^2 而反变，且当 $x=2$ 时， $y=12$ 。

(1) 以 x 表示 y；

(2) 求当 $y=3$ 及 $x>0$ 时 x 的值。

例2、若 x 随 y 和 $\frac{1}{z}$ 联变，则

A y 随 x 和 $\frac{1}{z}$ 联变　B y 随 $\frac{1}{x}$ 和 $\frac{1}{z}$ 联变　C z 随 $\frac{1}{x}$ 和 $\frac{1}{y}$ 联变

D A 和C 皆正确。　E A、B 和C 皆不正确。

例 3、已知 z 随 x 的平方而正变且随 y 而反变。当 $x=2, y=3$ 时， $z=4$ 。求 $x=4$ 及 $y=6$ 时, z 的值.

例 4、若 $a{:}c=1{:}5$， $c{:}b=4{:}1$ 及 $a{:}d=2{:}5$，求 $(a+b){:}(c+d)=$。

A. 1 : 1　B. 1 : 3　C. 1 : 5　D. 2 : 9　E. 3 : 10

例 5、V 是两部分之和，一部分随 t 而正变，另一部分随 t^2 而反变，当 t=1 时 V=14，当 t=2 时 V=7.

(1) 试以 t 表示 V；

(2) 求当 t=3 时 V 的值。

例 6、本金为 50000 元，利率为 3%，投资年限为 30 年.（$1.03^{30}=2.427$，$e^{0.9}=2.460$）

⑴若按单利息计算求本息和；

⑵若按复利息计算求本息和；

⑶若按连续复利息计算求本息和.

例 7、存款$10,000，年利率 4%，每半年以复利结算一次。求三年后的本利和。

A.$11,200　　B.$11,249　　C.$11,254　　D.$11,262　　E.$12,653

例 8、某商场于第一年初投入 50 万元进行商品经营，以后每年年终将当年获得的利润与当年年初投入的资金相加所得的总资金，作为下一年年初投入的资金继续进行经营.

（1）如果第一年的年获利率为 p，那么第一年年终的总资金是多少万元?（ 用代数式来表示）（注：年获利率=$\dfrac{\text{年利润}}{\text{年初投入资金}}\times 100\%$）

（2）如果第二年的年获利率多 10 个百分点（即第二年的年获利率是第一年的年获利率与 10%的和），第二年年终的总资金为 66 万元，求第一年的年获利率.

例 9、一部数码相机的标价是$8,450。若以标价售出，可获得 30%的盈利。

a. (4 分) 求该数码相机的成本。

b. (4 分) 若以 10%的折扣百分率出售该数码相机，求此时的盈利百分率。

例 10、张先生在 A 市看中了一套商品房，标价 800 万，现正处于庆国庆促消活动中，可在标价的基础上享受九五折优惠。下面有二种付款方式可供张先生选择

方法一： 一次付清所有款项，可享在原有折扣上再享受九五折优惠。

方法二： 先支付标价的 30%，余额按 20 年等额本息分期还款，其中年利率为 6%，从下月 1 日开始每月还款一次，共 240 期完成。

a. (2 分)若张先生按方法一付款，所需支付款项是多少？

b. (4 分)若张先生按方法二付款，每月支付的分期款项是多少(精确到元)？

c. (2 分)若张先生按方法二付款比以方法一付款，所需款项增加的百份比是多少？

例 11、制造某牌子手表的总成本($C)两部分之和。一部分是常数，而另一部份随手表生产的数目(n)正变.当制造 100 只手表时,每只手表的平均成本是$24。当制造的手表数目增加至 300 只时,每只手表的平均本减至$14。

⑴ 以 n 表示 C。

⑵ 设一次经济危机只会令生产总成本的常数部份增加了 20%,而余下部份则和之前的相同。问每只手表的平均成本增加会大于,等于,或者小于 20%?解释你的答案。

例 12、某正圆柱体的底半径增加 30%，而其高度减少 30%。求其体积改变的百分率。

A. 增加 6%　　B. 减少 6%　　C. 增加 18.3%　　D. 减少 18.3%　　E. 没有改变

例 13、已知 z 随 y^2 正变且随 x 反变，其中 x， y 和 z 都是正数。

⑴ 若 x 增加 15%和 y 增加 15%，求 z 的百分数增减。

⑵ 若 x 增加 25%和 y 减少 5%，求 z 的百分数增减。

⑶ 若 x 减少 20%和 z 增加 18%，求 y 的百分数增减。

课后练习：

1、若 $y \propto x$，下列何者为正确？

I. $x \propto y$　　II. $y^2 \propto x^2$　　III. $(y+x) \propto 2x$

A. 只有 II　B. 只有 III　C. 只有 I 及 II　D. 只有 I 及 III　E. I、II 和 III

2、x 随 $\sqrt{y}$ 正变而随 z^2 反变。已知当 $y=4$ 及 $z=3$ 时 $x=54$，求当 $y=1$ 及 $z=9$ 时 x 的值。

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4　E. 5

3、变量 y 随 s 正变而随 t 反变。若 s 增加 14%及 t 增加 20%，求 y 的改变百分率。

A. 减少 30%　B 减少 5%.　C.减少 6%　D.增加 6%　E.增加 34%

4、一个奖牌由 12 g 纯金和大量纯银铸造而成。如果金与银重量的比是 3：37， 求该奖牌的重量。

A. 148g　B. 154g　C. 160g　D. 166g　E. 170g

5、若 a 比 b 大 20%，a 比 c 大 50%，求 a : b : c。

A. 18 : 15 : 10　B. 15 : 12 : 10　C. 10 : 8 : 5

D. 8 : 6 : 3　E. 6 : 5 : 4

6、已知 y 随 x 正变，且随 z^2 反变。若 y 增加 60%及 z 减少 25%，求 x 增减的百分比。

A. −10%　B. +10%　C. − 20%　D. +20%　E. +25%

7、若 P 比 Q 小 20%，而 R 比 P 大 20%，则

A. Q 比 R 小 4%.　B. R 比 Q 小 4%.

C. Q 等于 R.　D. Q 比 R 大 4%.　E. R 比 Q 大 4%.

8、某班级总人数为 x 个，其中 y 个学生修读葡文课， w 个学生修读日文课，而有 r 个学生同时修读葡文和日文课。下列那一个式表示在该班中同时没有选修葡文及日文的学生的百分比?

A. $\dfrac{x}{y+w+r}\times 100\%$　B. $\dfrac{y+w+r}{x}\times 100\%$　C. $\dfrac{x-w-r}{x}\times 100\%$

D. $\dfrac{x-y-w-r}{x}\times 100\%$　E. $\dfrac{x-y-w+r}{x}\times 100\%$

9、若复利息每月计算一次，且年利率为12%，本金为$\$P$，则两年后的本利和是多少？

A. $\$P(1+12\%)^2$　　B. $\$P(1+12\%)^{24}$　　C. $\$P(1+1\%)^2$　　D. $\$P(1+1\%)^{24}$　　E. $\$P(1+6\%)^4$

10、当某书的标价为\$360，其盈利为标价的25% ，若该书以八折售出，新的盈利是多少?

A. \$15　　B. \$18　　C. \$24　　D. \$30　　E. \$72

11、生産一部游戏机的成本是\$C，已知 C 是两部分的和，而其中一部分固定不变，另一部分则随游戏机的生產量 N 而反变。当生產 3000 部时，每部的成本是\$328，当生產 6000 部时，每部的成本是\$224.5。

⑴ 若每部的成本是\$293.5，共生产了多少部游戏机？

⑵ 如果最少须生產 2300 部，每部的成本最高是多少?

12. 一颗未经雕琢的钻石的价值 $\$v$ 与该钻石的重量 w(以卡为单位)的平方成正比。已知一颗 3 卡重而未经雕琢的钻石价格为\$54,000。

试以 w 表 v。

⑵ 另一颗未经雕琢的钻石可以用下列其中一种方法切割为两颗 ：

方法一 把它分割为两颗相等重量的钻石 ；

方法二 把它以重量 1: 2 的比例分割为两颗。

问哪种方法有较大的价格损失?试解释原因。

13、若某商人以 \$84 出售一件恤衫， 盈利百分率为 40%。现恤衫的成本增加了 25%，

⑴ 若恤衫的售价不变，求新的盈利百分率。

⑵ 若要保持盈利百分率为 40%， 问每件恤衫的新售价是多少？

第五讲　正变、反变与联变课后练习答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	E	C	C	C	E	A	B	E	D	B

11、解：依题意可设$C=a+\dfrac{b}{N}$，则有：

$$\begin{cases}a+\dfrac{b}{3000}=328\\a+\dfrac{b}{6000}=224.5\end{cases}，解得：\begin{cases}a=121\\b=621000\end{cases}，即 C=121+\dfrac{621000}{N}\cdots\cdots\cdots①$$

⑴ 由$C=293.5$，代入①式可得：$N=3600$，即共生产了3600部游戏机；

⑵ 由$N\geq 2300$，代入①式可得：$C\leq 391$，即这时的每部的成本最高是\$391。

12.⑴ 解：由题意可设：$v=k\cdot w^2$，由$w=3, v=54\,000$，解得：$k=6000$，故$v=6000\cdot w^2$

⑵ 方法一比方法二损失更大。

记这一颗未经雕琢的钻石的重量为a，则原有价格为 $\$6000\cdot a^2$，

按方法一，分开后每颗的重量都是$\dfrac{1}{2}a$，由$v=6000\cdot(\dfrac{1}{2}a)^2=1500\cdot a^2$，

即分割后，两颗的总价格为 $\$3000\cdot a^2$

按方法二，分开后两颗的重量分别是$\dfrac{1}{3}a$、$\dfrac{2}{3}a$，

由$v_1=6000\cdot(\dfrac{1}{3}a)^2=\dfrac{2000}{3}\cdot a^2$，$v_2=6000\cdot(\dfrac{2}{3}a)^2=\dfrac{8000}{3}\cdot a^2$

$v_1+v_2=\dfrac{2000}{3}\cdot a^2+\dfrac{8000}{3}\cdot a^2=\dfrac{10000}{3}\cdot a^2$　即分割后，两颗的总价格为$\$\dfrac{10000}{3}\cdot a^2$

$\dfrac{10000}{3}\cdot a^2\geq 3000\cdot a^2$，故方法一比方法二损失更大。

13、解：设恤衫原来的成本为\$$x$，依题意可知：$\dfrac{84-x}{x}=40\%$，解得：$x=60$

由于$x\cdot(1+25\%)=75$，故新的成本为\$75.

⑴ 由于：$\dfrac{84-75}{75}\times 100\%=12\%$，故恤衫的售价不变时，新的盈利百分率为$12\%$。

⑵ 设每件恤衫的新售价是\$$y$。依题意可得：$\dfrac{y-75}{75}=40\%$，解得：$y=105$

故每件恤衫的新售价是\$105.

2023 届澳门四校联考数学　第六讲

代数运算与函数

知识简介：

1、对数、指数运算：对数的性质，换底公式；

2、分式的化简；

3、整式的乘法，平方差公式，立方和（差）公式，完全平方公式；

4、二次根式的化简。

5、换元法求函数的解析式；

6、二次函数的图象与性质-配方法的应用；

7、对数及指数函数的图形与性质；

8、函数图形的变换：平移、对称、反射、伸缩。

典例分析：

例 1、化简下列各式

（1）$2^{-\frac{1}{2}}+\frac{(-4)^0}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\sqrt{(1-\sqrt{5})^0}=$ ______________;

（2）$\log_2 25\times\log_3\frac{1}{16}\times\log_5\frac{1}{9}=$ ______________;

(3) $\log_5[4^{\frac{1}{2}\log_2 10}-(3\sqrt{3})^{\frac{2}{3}}-\log_7 7^2]=$ ______________.

例 2、若 $\lg x$ 表示 $\log_{10} x$ ，且 $\lg(5x^2)=a$，则 $\lg(\frac{4}{x^4})=$

A. $2-a$　　B. $2-2a$

C. $2-a^2$　　D. $4-a^2$　　E. $4-2a$

例3、$\left(\dfrac{\log_{10}2+\log_{10}12}{\log_{10}3+3\log_{10}2}\right)^7+27^4\times 3^{-13}=$

A. $-\dfrac{3}{2}$　　B. $\dfrac{3}{4}$　　C. $-\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{4}{3}$　　E. 0

例4、 求整数 a 和 b 使 $\sqrt{11+6\sqrt{2}}=a+b\sqrt{2}$.

例5、 化简 $\sqrt{5-\sqrt{21}}$.

例 6、对所有实数 $\dfrac{a+b-|b-a|}{2}$ 等于

A. a 和 b 的平均值　　B. $|a|$ 和 $|b|$ 的平均值　　C. a 和 b 中的极大值

D. a 和 b 中的极小值　　E. $|a+b|$

例 7、设 $r>0$ 及 $r+\dfrac{1}{r}=\sqrt{7}$，求以下的准确数值，并把答案化至最简。

(1) $r^3+\dfrac{1}{r^3}$；

(2) $r^6+\dfrac{1}{r^6}$

例8、若 $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$，则 $f(\dfrac{a}{b})-f(\dfrac{b}{a})=$

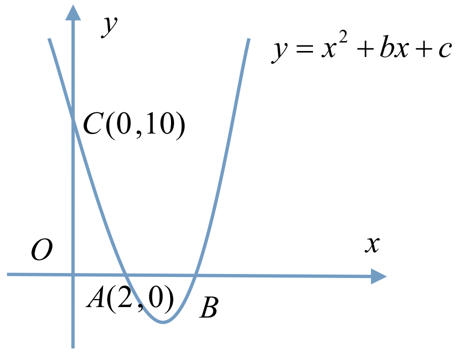
A. 0　　B. $-\dfrac{2b}{a}$　　C. $\dfrac{2a}{b}$　　D. $\dfrac{2a}{b}-\dfrac{2b}{a}$　　E. $\dfrac{2a}{b}+\dfrac{2b}{a}$

例9、若 $f(x)=2-3x$, $g(x)=2x+3$，求 $f[g(x)]$。

A. $-6x-7$　　B. $-6x+7$　　C. $6x+7$　　D. $6x-11$　　E. $6x+11$

例 10、如图曲线 $y=x^2+bx+c$ 与 y 轴相交于点 $C(0,10)$，并与 x 轴相交于点 $A(2,0)$ 和点 B。

a. (4 分) 求 b 和 c 的值。



b. (2 分) 求点 B 的坐标。

例 11、设 a 和 b 为正常数，且 $a>b$，$\dfrac{1}{bx+a^2+x^2}$ 的最大值为

A. $\dfrac{1}{a^2}$　B. $\dfrac{1}{2ab}$　C. $\dfrac{4}{4a^2-b^2}$　D. $\dfrac{1}{a^2-b^2}$　E. $\dfrac{1}{a^2+2b^2}$

例 12、某种细胞分裂时，由 1 个分裂成 2 个，2 个分裂成 4 个，4 个分裂成 8 个……，现有 2 个这样的细胞，分裂 n 次后得到的细胞个数为.

A. 2^n　B. 2^n+1　C. $2^{n+1}-1$　D. 2^{n+1}　E. $2^{n+1}+1$

例 13、已知在黎克特制中，地震的震级 M 与地震所释放出来的能量 E 有以下关系：$\log_{10}E=a+bM$，其中 a 和 b 是非零常数。已知每当地震的震级增加 2 级时，地震所释放出来的能量是原来的 1000 倍。

(a) 当地震的震级增加 1 级时，地震所释放出来的能量会是原来的多少倍?

(b) 已知当地震的震级是 4 级时，地震所释放出来的能量是 2.51×10^{17} 单位。

当地震的震级是 3 级时，地震所释放出来的能量是多少单位?

例 14、在同一坐标系中，函数 $y=2^x$ 与 $y=(\frac{1}{2})^x$ 的图象之间的关系是（　　）

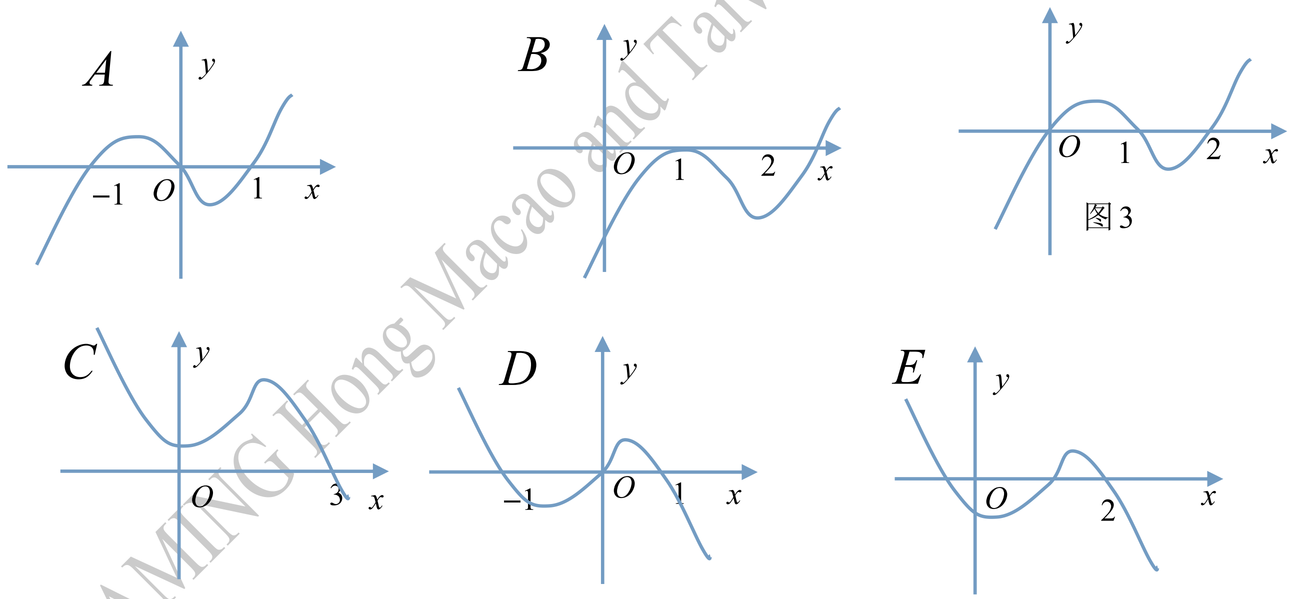
A. 关于 y 轴对称　　B. 关于 x 轴对称

C. 关于原点对称　　D. 关于直线 $y=x$ 对称　　E. 关于直线 $y=-x$ 对称

例15、若 $y=f(x)$ 的图象沿 x 轴反射后再沿 y 轴方向向上平移1单位，变换成 $y=g(x)$ 的图象，则 $g(x)=$（　　）

A. $f(x)+1$　　B. $f(x)-1$　　C. $1-f(x)$　　D. $f(x+1)$　　E. $f(x-1)$

例 16、图 3 为 $y=f(x)$ 的图像。下面那一个为 $y=-f(x+1)$ 的图像?



例 17、将 $y=2^x$ 的图像向右平移一单位，相当于将它

A. 向左平移一单位　　B. 沿 y 轴反射

C. 沿 x 轴反射　　D. 沿 y 轴放大至原来的 2 倍

E. 沿 y 轴缩小至原来的 $\frac{1}{2}$ 倍

课后练习：

1、若 $\log 2 = a$ 及 $\log 3 = b$ ，则 $\log 750$（注意：$\log x$ 即 $\log_{10} x$）

A. $2+3a-b$　B. $2-3a+b$　C. $2-3a-b$　D. $3+2a-b$　E. $3-2a+b$

2、若 $x-\frac{1}{x}=2$，则 $x^2+\frac{1}{x^2}=$

A. -2　B. 2　C. 4　D. 6　E. 8

3、若 $(x-1)(x-a)$ 与 $(x-2)^2+b$ 相同，求 a 及 b。

A. $a=2$ 及 $b=0$　B. $a=-3$ 及 $b=-1$

C. $a=3$ 及 $b=0$　D. $a=-3$ 及 $b=1$　E. $a=3$ 及 $b=-1$

4、若 $\lg x-\lg y=\lg(x-y)$，则

A. $x=\frac{y}{y-1}$　B. $x=\frac{y}{y+1}$　C. $x=\frac{y}{y^2+1}$　D. $x=\frac{y^2}{y-1}$　E. $x=\frac{y^2}{y+1}$

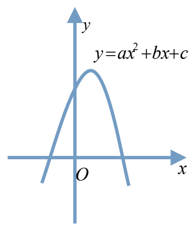
5、$\sqrt{19+8\sqrt{3}}=$

A. $-4-\sqrt{3}$　B. $-4+\sqrt{3}$　C. $4+\sqrt{3}$　D. $4-\sqrt{3}$　E. $2+2\sqrt{3}$

6、若 $\frac{1}{\mu}+\frac{1}{v}=\frac{2}{f}$，则 $v=$

A. $\frac{\mu f}{2\mu-f}$　B. $\frac{2\mu f}{\mu-f}$　C. $\frac{2\mu-f}{\mu f}$　D. $\frac{\mu-f}{2\mu f}$　E. $\frac{2\mu f}{2\mu-f}$

7、对图中所示之曲线，以下哪一个命题正确？



I. $a>0$　II. $b<0$　III. $c>0$

A. 只有 I　B. 只有 II　C. 只有 III　D. 只有 II 和 III　E. I、II 和 III

8、若函数 $f(x)=x^2+bx+c$ 对任意实数 x 都有 $f(2+x)=f(2-x)$，则下列不等式正确的是？

A. $f(1)<f(2)<f(4)$　B. $f(2)<f(4)<f(1)$　C. $f(1)<f(4)<f(2)$

D. $f(4)<f(1)<f(2)$　E. $f(2)<f(1)<f(4)$

9、若把 $y=2(1-x)^2+3$ 的图像向上平移 1 单位，然后向左平移 2 单位，那么新的图像的方程是

A. $y=2(1+x)^2+4$　　B. $y=2(2-x)^2+1$

C. $y=2(3-x)^2+2$　　D. $y=2(3-x)^2+4$　　E. $y=2(x-1)^2+4$

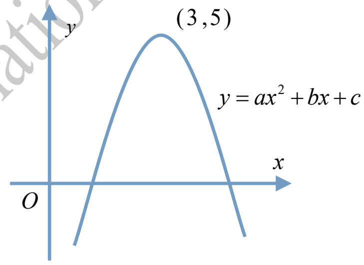
10、在同一坐标系中，函数 $y=\ln x$ 与 $y=\ln(-x)$ 的图象之间的关系是(　　)

A．关于 y 轴对称　　B．关于 x 轴对称

C．关于原点对称　　D．关于直线 $y=x$ 对称　　E．关于直线 $y=-x$ 对称

11、下图所示为 $y=ax^2+bx+c$ 的图像，其顶点的坐标是 (3, 5)。以下何者必为正确?

I. 图像的 y 轴截距大于 0；II. $b^2-4ac>0$.；III. 图像的对称轴的方程是 $x=3$。



A. 只有 II　　B. 只有 I 及 II

C. 只有 I 及 III　　D. 只有 II 及 III

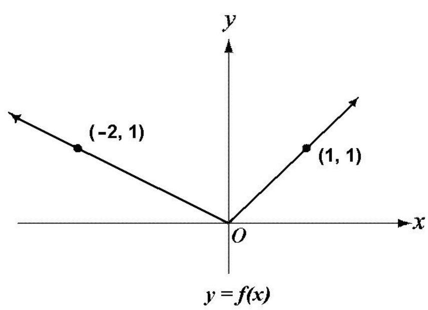
E. I、II 及 III

12、若 $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$，则 $f(a)+f(\dfrac{1}{a})=$

A. 0　　B. 1　　C. $\dfrac{2}{1-a}$　　D. $\dfrac{2a}{1-a}$　　E. $\dfrac{4a}{1-a}$

13、设 $f(x)$ 的图形如附图所示由两条射线组成。

若 $g(x)=f(x)+f(x-6)$，以下哪一项正确?



A. $g(x)$ 在 $x=-6$ 有极小值　　B. $g(x)$ 在 $x=2$ 有极小值

C. $g(x)$ 在 $x=0$ 有极小值　　D. $g(x)$ 在 $x=3$ 有极大值

E. $g(x)$ 在 $x=6$ 有极大

14、已知二次函数 $y=(k^2-2)x^2-4kx+m$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称，且它的最低点在直线 $y=-\dfrac{1}{2}x+2$ 上，求二次函数的解析式.

15、设 $x<0$ 且 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=9$，求以下的准确数值，并把答案化至最简。

(1)　$x+\dfrac{1}{x}$；

(2)　$x^3+\dfrac{1}{x^3}$.

第六讲　代数运算、化简与求值练习答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
答案	E	D	E	D	C	A	C	B	A	A	D	A	C

14、解：由二次函数 $y=(k^2-2)x^2-4kx+m$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称，可知：$-\dfrac{-4k}{2(k^2-2)}=2$

解得：$k=-1\ or\ k=2$，又知图象有最低点，可知 $k^2-2>0$，故 $k=2$

这时函数的解析式为：$y=2x^2-8x+m$，把 $x=2$ 代入，得 $y=m-8$，即顶点为 $(2,m-8)$

最低点 $(2,m-8)$ 在直线 $y=-\dfrac{1}{2}x+2$ 上，故 $m-8=-\dfrac{1}{2}\times2+2\Rightarrow m=9$，

所以，二次函数的解析式为 $y=2x^2-8x+9$。

15、解：(1) $\because\ x<0$，$\therefore\ x+\dfrac{1}{x}<0$

又 $\because\ (x+\dfrac{1}{x})^2=x^2+2+\dfrac{1}{x^2}=11$，$\therefore\ x+\dfrac{1}{x}=-\sqrt{11}$

(2) 由立方和公式可知 $x^3+\dfrac{1}{x^3}=(x+\dfrac{1}{x})(\dfrac{1}{x^2}-x\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2})=(x+\dfrac{1}{x})(x^2+\dfrac{1}{x^2}-1)$

结合 (1) 可知 $x^3+\dfrac{1}{x^3}=-\sqrt{11}\cdot(9-1)=-8\sqrt{11}$

2023 届澳门四校联考数学　第七讲

方程与不等式

知识简介：

1、一元二次方程、分式方程、无理方程、对数方程、指数方程的解法

2、一元二次方程的解与判别式的关系；韦达定理

3、列简易方程解应用题

4、集合和子集的概念，集合的交并补与韦恩图；

5、不等式的基本性质；

6、代数不等式及绝对值不等式的解法；

7、二元一次不等式组与简单的线性规划。

典例分析：

例 1、对以下方程求解 x：

(1) $\sqrt{2x^2+7x}=x+2$　　(2) $|2x-5|=x+2$　　(3) $\dfrac{2x-1}{\sqrt{5x^2+1}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

例 2、若方程 $2x^2-5x+k=0$ 没有实根，求 k 值的范围。

A. $k=\dfrac{25}{8}$　B. $k<-\dfrac{25}{8}$　C. $k>-\dfrac{25}{8}$　D. $k>\dfrac{25}{8}$　E. $k\le\dfrac{25}{8}$

例 3、 若一元二次方程 $x^2+(k+2)x+2(k+1)=0$ 的根的平方和为 25，求 k 的值。

例 4、方程式$\left|x^2-x-2\right|=x$

A. 没有实根　　B. 有一个实根　　C. 有两个不同的实根

D. 有三个不同的实根　　E. 有四个不同的实根

例 5、对以下方程求解x：

(1) $1000\cdot x^{2-5\log x}=1$　　(2) $4+\log_4 x+\log_x 64=0$

例 6、约翰今天早上从住所往学校的平均速度为每小时 60 公里，而他回程时取相同路线，平均速度为每小时 40 公里。 他两段行程的平均速度为

A. 每小时 50 公里　　B. 每小时 48 公里　　C. 每小时 45 公里

D. 每小时 43 公里　　E. 每小时 36 公里

例 7、在一份考试卷中，每道题的分数为 4 分、6 分、或 7 分。试卷满分为 100 分。该试卷最少有

A. 13 道题　　B. 14 道题　　C. 15 道题　　D. 16 道题　　E. 以上都不正确

例 8、850 人接受三种病毒 X、Y、及 Z 的抗体测试。对测试呈阳性反应的人数如下：

X 500　　Y 450　　Z 400　　X 和 Y 250

Y 和 Z 150　　X 和 Z 200　　X、Y 和 Z 50

对病毒 X 和 Z 呈阳性反应，但对病毒 Y 呈阴性反应的人数为

A.0　　B.100　　C.150　　D.200　　E.350

例 9、有多少个小于或等于 70,000 的正整数不是 3 或 8 的倍数?

A. 40,833　　B. 37,917　　C. 32,083　　D. 29,167　　E. 19,829

例 10、给定不同的正实数 x、y 及 z，满足条件 $\frac{x+z}{y}<\frac{y+z}{x}<\frac{x+y}{z}$，则下面那一项正确？

A. $x<y<z$　　B. $x<z<y$　　C. $y<x<z$

D. $y<z<x$　　E. $z<x<y$

例 11、解关于 x 的不等式组 $\begin{cases}\frac{2x+4}{3}-2\le\frac{5x+1}{6}\\ \frac{3-x}{2}-\frac{5}{6}>\frac{2x-5}{3}\end{cases}$.

A. $x>2$　　B. $x\le -5$　　C. $-5\le x<2$

D. $x\le -5$ 或 $x>2$　　E. 此不等式组无解

例 12、不等式$|x\cdot(x-5)|<6$的解是

A. $\{x|-2<x<1\}$ B. $\{x|-1<x<1\}$ C. $\{x|-1<x<6\}$

D. $\{x|-1<x<2\}\cup\{x|3<x<6\}$ E. $\{x|-2<x<1\}\cup\{x|3<x<6\}$

例 13、不等式$\dfrac{x^2+3x+1}{x+2}\le -1$的解为

A. $-3\le x<-2$或$x\le -1$ B. $x\le -3$或 $-2\le x\le -1$ C. $x\le -3$

D. $x\le -3$ 或 $-2<x\le -1$ E. $x\le -3$或 $x>-2$

例 14、设R^2为在$O-xy$-平面上的区域，且满足不等式 $x\ge 0$，$x\le 3$， $x-y\le 0$，及 $x+y\ge 2$。

在区域R^2上 $6x+5y$的极小值是

A. 9 B. 10 C. 11 D. 12 E. 33

课后练习：

1.方程式 $(2x+5)^{x^2-1}=1$ 有

A.一个实根　　B.两个实根　　C.三个实根　　D.四个实根　　E.无限个实根

2. 若 α,β 为方程 $2x^2+4x+k=0$ 的根，且 $\alpha^2+\beta^2=6$，求 k 的值。

A. -2　　B. -1　　C. 0　　D. 1　　E. 2

3.若直线 $y=5x+k$ 与抛物线 $y=x^2+3x+4$ 相切求 k 的值

A. $\frac{-3+\sqrt{7}}{2}$　　B. $\frac{7}{4}$　　C. 3　　D. -2　　E. $\sqrt{2}-1$

4. 一名母亲现时年龄是她女儿的四倍。四年前，她们年龄的比为 8:1。问两年后她们年龄的比是多少?

A. 2 : 1　　B. 3 : 1　　C. 5 : 2　　D. 7 : 2　　E. 10 : 3

5、 水管 A 可在 12 小时内把一个游泳池注满，水管 B 则要用 9 小时。若同时使用两条水管，需要多久才能注满该游泳池?

A. 2 小时　　B. 3 小时　　C. 4/3 小时　　D. 36/7 小时　　E. 24/5 小时

6、A、B、C、D 四人的总高度为 $644\,cm$，A 为最高，D 为最矮，A 和 D 的高度的差异是 $22\,cm$。A 和 B 高度的差异与 C 和 D 之间的差异相同。求 A 的高度。

A. $178\,cm$　　B. $176\,cm$　　C. $174\,cm$　　D. $172\,cm$　　E. $170\,cm$

7、某公司共有掌握了英语、日语、俄语三个语种中至少一个语种的翻译人员100人，对这三种语言的掌握情况的人数统计如下：

英语 70 人　　日语 60 人　　俄语 50 人

英语与 和 日语 40 人　　英语和俄语 30 人　　日语和俄语 20 人

则同时掌握了英语、日语、俄语三种语言的人数为：

A.5 人　　B.10 人　　C.15 人　　D.20 人　　E.25 人

8、下列哪一个命题正确？

I. 若 $a>b$，那麼 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　II. 若 $a<b$，那麼 $a^2<b^2$

III. 若 $a^2+b^2=0$，那麼 $a=b=0$　　IV. 若 $-1<a<b$，那麼 $a^2<b^2$

A. 只有 I 和 II　　　B. 只有 I 和 IV　　　C. 只有 III

D. 只有 III 和 IV.　　　E. 没有一个命题正确

9、若 6 为方程式 $x^2-4x+\frac{d}{2}=0$ 的根，其中 d 为一常数，解不等式 $x^2-4x+\frac{d}{2}>0$。

A. $1<x<3$　　　B. $x<1$ 或 $x>3$　　　C. $-2<x<6$

D. $x<-2$ 或 $x>6$　　　E. 该不等式没有解

10、解不等式组 $\begin{cases}\dfrac{3x+4}{2}-1\le\dfrac{5x+2}{3}\\ \dfrac{5-x}{3}+1>\dfrac{7x-10}{2}\end{cases}$.

A. $x\ge 2$　　B. $x\le -2$　　C. $-2\le x<2$　　D. x 为任意实数　　E.此不等式组无解

11. (1) 对以下方程求解 x：$\sqrt{2x+12}-2=x$

(2)设 $f(x)=\sqrt{3-\sqrt{x^2-2}}$ 。求所有使 $f(x)$ 为实数 的 x 值。

12、 对以下方程求解 x。

(1) $e^{2x}+3e^x-10=0$；　　　(2) $\log_5[\log_3(\log_2 x)]=0$。

13.有一列火车从甲站开往乙站一个小时后在途中发生故障，需要以正常速度的 3/4 行驶，故比平时晚了三个小时到达乙站。若列车多行 60 公里才发生故障，则列车将会比平时晚了两小时四十分钟才到达乙站。 求甲、乙两站之间的距离。

14、 设 $A=\{x\mid(3x+10)(x+1)(x-2)(x-7)<0, x\text{ 为整数}\}$，求集合 A。

15、在 $O-xy$ 平面上绘画出同时满足 $y\ge x$ 、 $x\ge -1$ 及 $y\le 2$ 的区域，并求 $z=3x-y$ 的取值范围。

第七讲　方程与列方程解应用题练习答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	A	C	E	D	D	B	C	D	E

11. (1) 解：移项得：$\sqrt{2x+12}=x+2$，

两边平方并化简得：$x^2+2x-8=0$

解得：$x=2$ 或 $x=-4$

经检验，$x=-4$ 是增根，$x=2$ 是原方程的根。故原方程的根是 $x=2$。

(2)解：由题意可得 $3-\sqrt{x^2-2}\geq 0\Rightarrow\sqrt{x^2-2}\leq 3\Rightarrow 0\leq x^2-2\leq 9\Rightarrow 2\leq x^2\leq 11$

解得 $-\sqrt{11}<x<-\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}<x<\sqrt{11}$

故 x 的取值范围是 $-\sqrt{11}<x<-\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}<x<\sqrt{11}$。

12、(1) 令 $e^x=t\ \ (t>0)$，则原方程可化为：$t^2+3t-10=0$

解得：$t=2$ 或 $t=-5$（舍去）

故 $e^x=2$，解得 $x=\ln 2$；

(2)利用对数的性质 $\log_a a^b=b\,(a>0,\text{且}a\neq 1)$

$\log_5[\log_3(\log_2 x)]=0\Rightarrow\log_3(\log_2 x)=5^0=1\Rightarrow\log_2 x=3^1=3\Rightarrow x=2^3=8$

故原方程的根是 $x=8$。

13.解：设原来的时间为 t 小时，速度为 v 千米/小时，依题意可知：

$$\begin{cases}1+\dfrac{4}{3}(t-1)=t+3\\ \dfrac{60}{\frac{3}{4}v}-\dfrac{60}{v}=3-\dfrac{8}{3}\end{cases}，解得\begin{cases}t=10\\ v=60\end{cases}，故 S=v\cdot t=600$$

答：甲、乙两站之间的距离为600千米。

14、解：由于方程 $(3x+10)(x+1)(x-2)(x-7)=0$ 的解为 $x_1=-\dfrac{10}{3}$, $x_2=-1$, $x_3=2$, $x_4=7$，

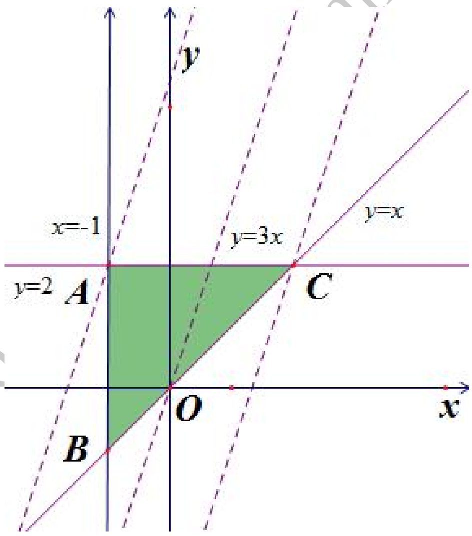
利用数轴标根法（符号法则）可得不等式 $(3x+10)(x+1)(x-2)(x-7)<0$ 的解集为

$-\dfrac{10}{3}<x<-1$ 或 $2<x<7$，又知 x 为整数，故 $A=\{-3,-2,3,4,5,6\}$。

15、解： 题中不等式所表示的区域是 $y=x$ 的上半平面和 $y=2$ 的下半平面以及 $x=-1$ 的左半平面（包括边界），如下图的阴影部分所示。

由于 $z=3x-y$ 表示直线 $3x-y=0$ 的平行线，$-z$ 是直线的纵截距，作出直线 $3x-y=0$，观察图中直线的平移，可以看出将直线向右推 z 值增加，将直线向左推 z 值减小；又由于直线 L_0 与阴影部分有公共点。从上图可看出，在直线过点 A 时，z 有极大值，这里的点 A 是直线 $x=-1$ 与直线 $y=2$ 的交点 $A(-1,2)$。$\therefore$ z 的极小值 $=3\times(-1)-2=-5$；在直线过点 C 时，z 有极大值，这里的点 C 是直线 $y=x$ 与直线 $y=2$ 的交点 $C(2,2)$。$\therefore$ z 的极大值 $=4$。

故 z 的取值范围是区间：$[-5,4]$



2023 届澳门四校联考数学　第八讲

平面几何与解析几何

知识简介：

1、三角形及凸多边形内角和定理；直角三角形的勾股定理；相似三角形与全等三角形；

2、正方形、矩形、菱形及平行四边形的性质；

3、中点定理：三角形的三条中线交于一点,这点到顶点的距离是它到对边中点距离的 2 倍。该点叫做三角形的重心。

4、平行线分线段成比例定理。

5、圆：圆、弦及弧的性质；圆心角、圆周角、圆内接四边形、外接圆；弧长及扇形面积公式。

6、直线的方程；两点的距离，线段的定比分点；直线的斜率与截距

7、两直线的位置关系：平行与垂直；

8、圆的一般方程与标准方程

9、直线与圆的位置关系关系

10、椭圆、双曲线、抛物线的定义和标准方程、图形与性质；

11、直线与圆锥曲线的相交。

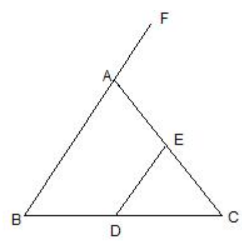
典例分析：

例1、在图中, 若 $\angle ABC=50^\circ$， $\angle DEA=108^\circ$， $\angle EDC=x^\circ$ 及 $\angle FAC=y^\circ$，则 $x+y=$

A. 79°　　B. 104°

C. 133°　　D. 158°

E. 180°



例 2、在某凸 n 边形中，其中一只内角是 x°，而余下 $(n-1)$ 只内角的和是 2006°，求 n。

A. 12　　B. 13　　C. 14　　D. 15　　E. 16

例 3、在以下图中，若 ABC 的面积是 24 平方厘米，$\frac{CD}{AD}=\frac{1}{2},\frac{BE}{EC}=\frac{1}{2}$，则 ΔBED 的面积是

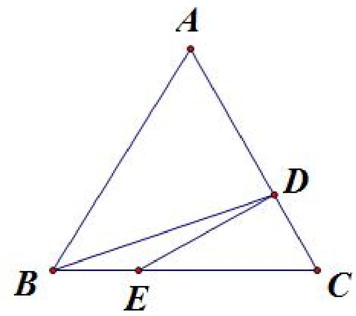
A. $\frac{9}{8}$ 平方厘米

B. $2\frac{2}{3}$ 平方厘米

C. 3 平方厘米

D $5\frac{1}{3}$ 平方厘米

E. $10\frac{1}{2}$ 平方厘米



例 4、有一把梯子倚着一道垂直的墙壁，梯子的顶部 A 离地面 24 英尺。 若把梯子的底部再向外移 8 英尺，则梯子顶部向下滑至离地面 20 英尺的点 A'。梯子有多长？

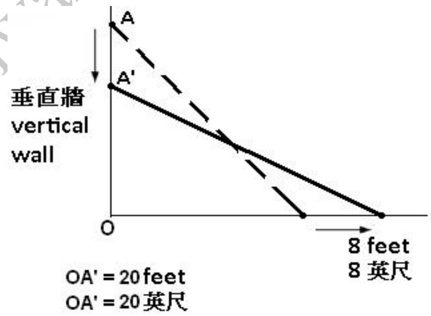
A. 25 英尺

B. 27 英尺

C. 28 英尺

D. 30 英尺

E. 32 英尺

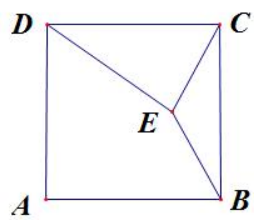


例5、在图中，$ABCD$ 为一边长 $8cm$ 的正方形，若 $BE=CE=5cm$，求 ED 的长度。.

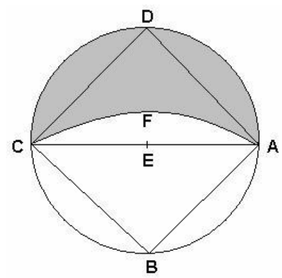
A. $8cm$ B. $10cm$

C. $\sqrt{34}\,cm$ D. $\sqrt{41}\,cm$

E. $13\sqrt{2}\,cm$



例 6、在图中，ABCD 为边长 d 的正方形。AFC 为以 B 作圆心，半径为 d 的弧，而 ADC 为以 E (AC 的中点)作圆心的半圆。阴影部份的面积是

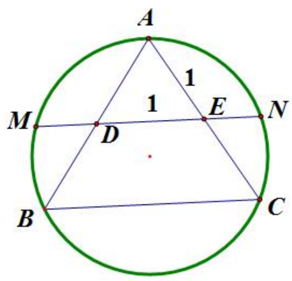


A. $\frac{d^2}{3}$　　B. $\frac{d^2}{2}$

C. $\frac{1}{6}\pi d^2$　　D $\frac{1}{3}\pi d^2-\frac{d^2}{2}$

E. $\frac{1}{4}\pi d^2-\frac{d^2}{3}$

例 7、图中 ΔABC 为圆内接全等三角形。弦 MN 把 ΔABC 两边等分于点 D、E ，若 $|AB|=2$ ，EN 的长度为

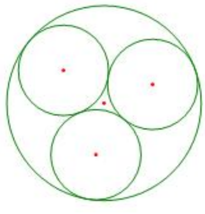


A. $\frac{\sqrt{5}+1}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{10}}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{2}+1}{4}$

E. $\frac{\sqrt{6}}{4}$

例8、图中大圆与其余3个小圆相切，若3个小圆的直径都为 $2\sqrt{3}\,cm$ ，大圆的面积为多少？



A. $(2+\sqrt{3})\pi\, cm^2$　　B. $(4+2\sqrt{3})\pi\, cm^2$

C. $(12+6\sqrt{3})\pi\, cm^2$　　D. $(7+4\sqrt{3})\pi\, cm^2$

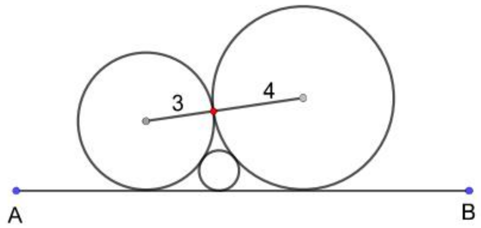
E. $12\pi\, cm^2$

例 9、右图中三个圆及线段 AB 互切，两个大圆半径分别为 3 单位及 4 单位.求小圆的半径.

A. $84-48\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{2}-1$

C. $2\sqrt{2}-2$　　D. $6-4\sqrt{2}$

E. $42-24\sqrt{3}$



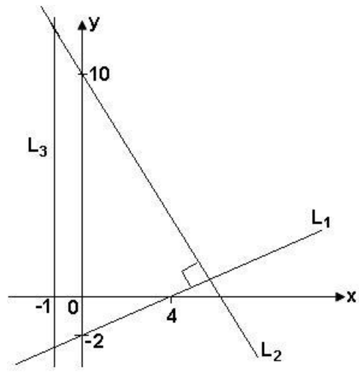
例 10、给定 $A(1,4)$、$B(3,2)$、和 $C(p,2p-3)$ 三点，其中 $\angle ABC=90°$。

⑴ 通过考虑 AB 和 BC 的斜率，求 p 的值。

⑵ 求 AC 中点的坐标。

⑶ D 为一点使得 $ABCD$ 为一长方形(矩形)。利用(b)的结果，或用其他方法，求点 D 的坐标。

例 11、在以下图中，L_1 是一条 x 截距为 4，y 截距为 -2 的直线;而 L_2 的 y 截距为 10，且与 L_1 互相垂直。L_3 是一条 x 截距为 -1 的垂直线。



⑴ 求 L_1 的方程;

⑵ 求 L_2 的方程;

⑶ 由此，或其他方法，求直线 L_1、L_2 和 L_3 所围成的面积。

例12、设 $A=(7,-2)$ 及 $B=(-5,4)$,求把 AB 以 1:2 之比内分的点 P 的坐标。

A. $(-2,2.5)$　　B. $(-1,2)$　　C. $(1,0.5)$　　D. $(3,0)$　　E. $(4,-0.5)$

例13、若点 $(1,-2)$，以原点为旋转中心，依顺时钟方向旋转 $90°$ 至点 p，写出点 p 的坐标。

A. $(-2,-1)$　　B. $(-2,1)$　　C. $(2,-1)$　　D. $(2,1)$　　E.以上皆不是

例 14、给定两圆形 $x^2+y^2-4x-5=0$ 和 $x^2+y^2-4y-5=0$ 下列何者为正确?

I. 两圆形具有相同的圆心　II. 两圆形的半径相等　III. 两圆形均通过点(−1, 0)

A. 只有 I　　B. 只有 II　　C. 只有 III

D. 只有 I 及 II　　E. 只有 II 及 III

例 15、已知 (－2 , 2)、(4, 2) 及(－3, －5)为一圆上三点。圆的半径为

A. 3　　B. $\sqrt{10}$　　C. $\sqrt{15}$　　D. 4　　E. 5

例 16、若直线 $y=2x+2$ 与圆 $(x+k)^2+(y-1)^2=5$ 相切，那么 $k=?$

A. -3 或 2　　B. -2 或 3　　C. -1 或 4　　D. -3 或 3　　E. -2 或 2　（B）

例 17、一直线穿过点 $A(0,4)$ 与圆 $x^2+y^2-6x-16=0$ 相交于 M、N 两点，若 $|MN|=8$。求直线的方程。

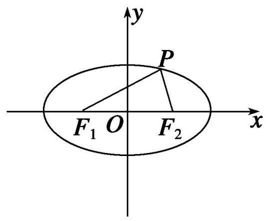
例 18、坐标平面上有一椭圆，已知其长轴平行于 x 轴，短轴的一个顶点为 $(0,4)$，且其中一个焦点为 $(4,0)$。问此椭圆长轴的长度为何？

A. $6\sqrt{3}$　　B. $4\sqrt{10}-1$　　C. $8\sqrt{3}-2$　　D. $6\sqrt{2}$　　E. $8\sqrt{2}$

例 19、如图，已知点 P 是以 F_1、F_2 为焦点的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 上一点，

若 $PF_1\perp PF_2$，$\tan\angle PF_1F_2=\frac{1}{2}$，则此椭圆的离心率是.

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　E. $\frac{\sqrt{5}}{6}$



例 20、若双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>0,b>0)$ 的焦点到其渐近线的距离等于实轴长，则该双曲线的离心率为 (　　)

A. $\sqrt{5}$　　B. 5　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2　　E. $\sqrt{3}$

例 21、双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，点 A 在双曲线上，

且 $AF_2\perp x$ 轴，若 $\frac{|AF_1|}{|AF_2|}=\frac{5}{3}$，则双曲线的离心率为.

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{4}{3}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2　　E. $\sqrt{3}$

例 22、抛物线 $y^2=10x$ 的焦点到准线的距离是（　　）

A. $\frac{5}{2}$　　B. 5　　C. $\frac{15}{2}$　　D. 10　　E. 15

例 23、已知 F_1、F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 的两个焦点.

(1) 若 P 为椭圆上一点，且 $\angle F_1PF_2=60°$，求 $\triangle F_1PF_2$ 的面积；

(2) 若椭圆上存在两点 M,N 关于直线 $y=2x+b$ 对称，求 b 的取值范围。

课后练习：

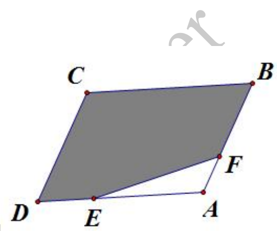
1、某三角形的两条边的长度为 5 和 8。第三条边的长度可能是

I. 3　　　II. 8　　　III. 12

A. 只有 I　　　B. 只有 II

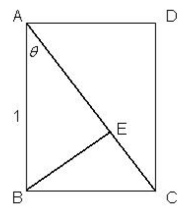
C. 只有 I 和 III　　　D. 只有 II 和 III　　　E. I、II 和 III

2、下图中，$ABCD$ 为平行四边形。E 和 F 分别是 AD 和 AB 上的点，使 $AE:ED=BF:FA=2:1$。若 ΔAEF 的面积是 S，则阴影部份的面积是



A. $5S$　　B. $6S$　　C. $7S$　　D. $8S$　　E. $9S$

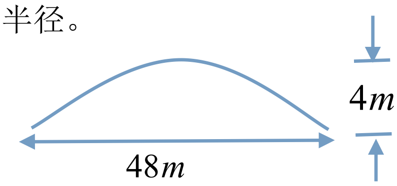
3、图中 $ABCD$ 是一个长方形。$BE\perp AC$。若 $AB=1$，$\angle BAE=\theta$，则 $CE=$



A. $\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$　　B. $\dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$　　C. $\dfrac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}$

D. $\tan\theta$　　E. 1

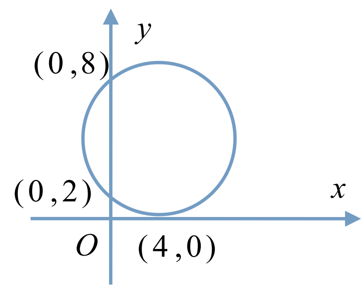
4、下图所示为一道圆弧形的拱桥，桥高 4m 跨度为 48m。求该圆弧的半径。



A. 72 m　　B. 74 m　　C. 76 m

D. 78 m　　E. 80 m

5、在图中，圆与 x 轴相切于点 $(4,0)$，且与 y 轴相交于 $(0,2)$ 和 $(0,8)$ 两点。求该圆的方程。



A. $x^2+y^2-4x-5y+4=0$　　B. $x^2+y^2-4x-5y+16=0$

C. $x^2+y^2-8x-8y+16=0$　　D. $x^2+y^2-8x-10y+4=0$

E. $x^2+y^2-8x-10y+16=0$

6、一条穿过原点，且斜率为 m 的直线与圆 $x^2+y^2-6x-8y+20=0$ 相切,求 m。

A. $-\dfrac{3}{4}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{4}{3}$　　D. $\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{11}{2}$　　E. $-\dfrac{3}{4}$ 或 $-\dfrac{11}{4}$

7、若直线 l 经过点 $(a-2,-1)$ 和 $(-a-2,1)$，且与经过点 $(-2,1)$，斜率为 $-\dfrac{2}{3}$ 直线垂直，则实数 a 的值是（　　）

A. $-\dfrac{2}{3}$　　B. $-\dfrac{3}{2}$　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{3}{2}$　　E. $\dfrac{1}{2}$

8、椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的一个焦点是圆 $x^2+y^2-6x+8=0$ 的圆心，且短轴长为 8，则椭圆的左顶点为(　　)

A．$(-3,0)$　　B．$(-4,0)$　　C．$(-10,0)$　　D．$(-5,0)$　　E.$(-8,0)$

9、椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的半焦距为 c，若直线 $y=2x$ 与椭圆的一个交点 P 的横坐标为 c，则椭圆的离心率为　　(　　)

A.$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$　　B.$\frac{2\sqrt{2}-1}{2}$　　C.$\sqrt{3}-1$　　D.$\sqrt{2}-1$　　E.$\frac{\sqrt{2}}{2}$

10、抛物线 $x^2=\frac{1}{2}y$ 的焦点 F 到其准线 l 的距离是(　　)

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C.1　　D.2　　E.4

11、在某正 n 边形内，设每只内角及每只外角的大小分别为 $x°$ 和 $y°$。

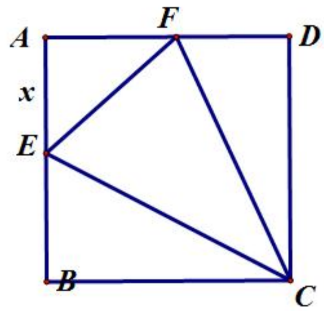
⑴ 写下 x 和 y 的值，答案以 n 表示。

⑵ 设每只内角是每只外角的 4 倍，求正多边形的边数。

12、在图中 $ABCD$ 是边长为1 的正方形。E 和 F 分别为 AB 和 AD 上的点，使得 $AE=AF=x$。

⑴ 求 ΔCEF 的面积，答案以 x 表示。

⑵ 试确定当 x 为何值时，ΔCEF 的面积最大，并求 ΔCEF 的面积最大值。



13、已知顶点在座标原点的抛物线 C 以双曲线 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 的左焦点为焦点。

⑴ 求抛物线 C 的标准方程；

⑵ 若直线 $x=ky+2$ 交 C 于 A、B 两点，且 $|AB|=8\sqrt{15}$ 求 k 的值.

第八讲 平面几何课后练习答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	C	A	D	E	D	A	D	D	A

11、在某正n边形内，设每只内角及每只外角的大小分别为$x°$和$y°$。

(1) 解：由外角和定理，任意多边形的外角和为$360°$，故$y=\dfrac{360}{n}$，

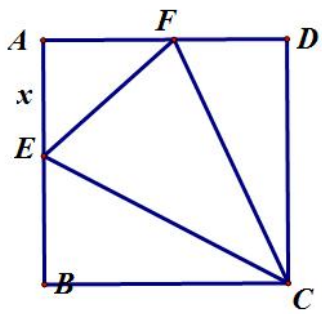
又知相邻的内角与外角之和为$180°$，故$x=180-\dfrac{360}{n}=\dfrac{180\cdot(n-2)}{n}$。

（也可以用内角和定理：n边形的内角和为$(n-2)\cdot 180°$）

(2) 由(1)可知：$x=4y\Rightarrow\dfrac{180(n-2)}{n}=4\times\dfrac{360}{n}$，解得：$n=10$。

故这个正多边形的边数为$n=10$。

12、解：(1) 如图，由已知$AE=AF=x$，



且正方形的连长为1,故$DF=BE=1-x$

$S_{\Delta AEF}=\dfrac{1}{2}\cdot AE\cdot AF=\dfrac{1}{2}x^2$

$S_{\Delta BCE}=\dfrac{1}{2}\cdot BE\cdot BC=\dfrac{1}{2}(1-x)$

$S_{\Delta DCF}=\dfrac{1}{2}\cdot DF\cdot DC=\dfrac{1}{2}(1-x)$

$S_{\Delta CEF}=S_{正方形}-S_{\Delta AEF}-S_{\Delta BCE}-S_{\Delta DCF}=1-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}(1-x)-\dfrac{1}{2}(1-x)=x-\dfrac{1}{2}x^2$

即ΔCEF的面积为$x-\dfrac{1}{2}x^2$。

(2) 设ΔCEF的面积为y，由(1)知$y=x-\dfrac{1}{2}x^2=-\dfrac{1}{2}x^2+x=-\dfrac{1}{2}(x-1)^2+\dfrac{1}{2}$

故当$x=1$时，ΔCEF的面积最大，这时$S_{\Delta CEF}=\dfrac{1}{2}$。

13、(1) 双曲线$\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$中$a^2=3$, $b^2=1$，故$c^2=a^2+b^2=4\Rightarrow c=2$

双曲线的左焦点为$F(-2,0)$，故抛物线的焦点坐标为$F(-2,0)$，

所以抛物线C的标准方程为$y^2=-8x$；

⑵ 设直线 $x=my+2$ 交 C 于 $A(x_1,y_1)$、$A(x_2,y_2)$，依题意得：

$$\begin{cases} y^2=-8x \\ x=my+2 \end{cases} \Rightarrow y^2+8my+16=0$$

由 $\Delta=(64m)^2-64>0 \Rightarrow m^2>1$，由求根公式 $|y_2-y_1|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=8\sqrt{m^2-1}$

由 $|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{m^2+1}\cdot|y_2-y_1|=8\sqrt{m^4-1}=8\sqrt{15}$

解得：$m^4=16 \Rightarrow m=\pm 2$

（也可以用根与系数的关系 $\begin{cases} y_1+y_2=-8m \\ y_1\cdot y_2=16 \end{cases}$，再利用 $(y_1-y_2)^2=(y_1+y_2)^2-4y_1y_2$）

2023 届澳门四校联考数学　第九讲

三角函数

知识简介：

1、同角三角函数的基本关系式：$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，$\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$；

2、和角、差角、二倍角公式及其逆用：

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta$；　　$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$；

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$；　$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$；

$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\cdot\tan\beta}$；　　$\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

3、辅助角公式：$a\cos\theta+b\sin\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\varphi)$

4、三角形面积；正弦定理，余弦定理；含一个未知数的三角方程求解；

典例分析：

例 1、若 $\tan\theta=\dfrac{a}{b}$，其中 $0°<\theta<90°$，且 a、b 为正数，求 $\cos\theta$。

A. $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$　B. $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$　C. $\sqrt{a^2+b^2}$　D. $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$　E. $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$

例 2、⑴ 以 $\cot A$ 及 $\cot B$ 表示 $\cot(A+B)$。（提示: $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\cdot\tan B}$）

⑵ 若 α 及 β 均为锐角且 $\alpha+\beta=45°$，求 $(1-\cot\alpha)(1-\cot\beta)$ 并化至最简。

例3、化简 $\dfrac{\sin(90^{\circ}-\theta)\cos\theta-\cos(90^{\circ}+\theta)\sin\theta}{\cot(90^{\circ}-\theta)}$ 这里 $\cot(90^{\circ}-\theta\neq 0)$

A. $\sin\theta$　　B. $\cos\theta$　　C. $\tan\theta$　　D. $\cot\theta$　　E. 1

例 4、若 $0°\leq\theta\leq 360°$，方程 $\cos\theta+2\sin\theta\cdot\cos\theta=0$ 有多少个根?

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4　　E. 5

例 5、已知 $\tan(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{1}{2}$ ，(1) 求 $\tan\alpha$ 的值； (2) 求 $\dfrac{\sin 2\alpha-\cos^2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$ 的值.

例 6、解方程式：$2\sin^2\theta=1$, $0\leq\theta\leq 2\pi$

例 7、已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$， $\alpha\in[90°,180°]$，求

(1) $\sin\alpha-\cos\alpha$；　　(2) $\cos 4\alpha$。

课后练习：

1、若 $90° < \theta < 180°$，下列何者必为正确？

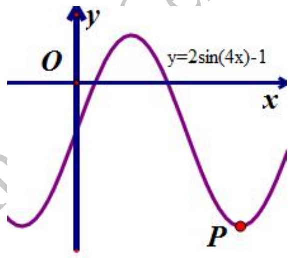
A. $\sin\theta - \cos\theta > 0$　　B. $\sin\theta - \cos\theta < 0$　　C. $\sin\theta + \cos\theta > 0$

D. $\sin\theta + \cos\theta < 0$　　E. $\sin\theta \cdot \cos\theta > 0$

2、如果 $\sin\theta + \cos\theta = 0$，求 $\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta}$ 的值。

A. −1　　B. 1　　C. 0　　D. 2　　E. － 2

3、上图所示为 $y = 2\sin 4x - 1$ 的图像。点 P 的坐标为



A. $(\dfrac{3\pi}{8}, -3)$　　B. $(\dfrac{3\pi}{4}, -3)$　　C. $(\dfrac{3\pi}{8}, -1)$

D. $(\dfrac{3\pi}{4}, -1)$　　E. $(\dfrac{3\pi}{4}, -5)$

4、若 θ 位于第二象限，那么 $\cos\theta$ 可能等于

Ⅰ 0.7；　　Ⅱ -0.8；　　Ⅲ -1.1。

A. 只有I　B. 只有II　C. 只有I 和II　D. 只有II 和III　E. I、II 和III

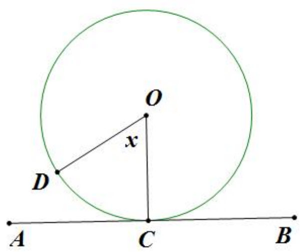
5、已知 $(\dfrac{1}{3})^{\tan(\theta-\pi)} > 1$，则 θ 是（　　）

A.第一或第二象限　　B.第二或第四象限

C.第一或第三象限　　D.第二或第三象限

E..第三或四象限

6、图中，一个半径为 r，圆心为 O 的圆与地面相切，D 是圆上一点使得 $\angle COD = x$，求 D 到地面 AB 的距离。



A $r(1-\sin x)$　B $r(1+\sin x)$　C $r(1+\tan x)$

D $r(1-\cos x)$　E $r(1+\cos x)$

7、解方程 $\sin x \cdot \cos x = 0.25$； $0 \le x \le 2\pi$ 。

第九讲　三角函数课后练习答案

题号	1	2	3	4	5	6
答案	A	E	A	B	C	D

7、解：由二倍角公式$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$，可得$\frac{1}{2}\sin 2x = 0.25 \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$，

又$\because 0 \le x \le 2\pi$，　$\therefore 0 \le 2x \le 4\pi$

所以　$2x = \frac{\pi}{6}$或　$2x = \frac{5\pi}{6}$或　$2x = \frac{13\pi}{6}$或　$2x = \frac{17\pi}{6}$，

故　$x = \frac{\pi}{12}$或　$x = \frac{5\pi}{12}$或　$x = \frac{13\pi}{12}$或　$x = \frac{17\pi}{12}$。