2021年暨南大学、华侨大学联合招收港澳台、海外华侨、华人及其他外籍学生入学考试题目

数学(答卷时间：2小时)

一、选择题：本大题共15小题，每小题4分，共60分。在每小题所给出的四个选项中只有一个是正确的，把你的选择按题号填入答题纸。

1.设集合 $A=\{x|x=\log_2 a, a>2\}, B=\{1,2,3\}$,则 $A\cap B=$(　　)

A. $\{1\}$　　B. $\{1,2\}$　　C. $\{1,2,3\}$　　D. $\{2,3\}$

2.不等式 $\left|\frac{ax-1}{x}\right|>a$ 的解集为 M，且 $2\notin M$，则 a 的取值范围为(　　)

A. $a>\frac{1}{4}$　　B. $a\geq\frac{1}{4}$　　C. $0<a<\frac{1}{2}$　　D. $0<a\leq\frac{1}{2}$

3.已知偶函数 $f(x)$ 在 $x\geq0$ 时为单调递增函数，则满足 $f(2x-1)<f(\frac{1}{3})$ 的 x 的取值范围是(　　)

A. $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$　　B. $[\frac{1}{3},\frac{2}{3})$　　C. $(\frac{1}{2},\frac{2}{3})$　　D. $(\frac{1}{2},\frac{2}{3}]$

4.已知函数 $y=f(x)$ 是奇函数，当 $x\geq0$ 时，$f(x)=2^x-1$，设 $f(x)$ 的反函数是 $y=g(x)$，则 $g(-7)=$(　　)

A. 3　　B. -3　　C. 2　　D. -2

5. $2\log_5 10+\log_5 0.25=$(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 4

6.若 $\sin(\pi-\alpha)=\frac{4}{5}$，$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，则 $\sin(2\alpha)-\cos^2(\frac{\alpha}{2})$ 的值等于(　　)

A. $\frac{4}{25}$　　B. $\frac{25}{4}$　　C. $\frac{25}{16}$　　D. $\frac{16}{25}$

7.已知 α,β 均为锐角，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan(\alpha-\beta)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\cos\beta=$(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

8.等比数列$\{a_n\}$中各项均为实数，其中$a_3=-2$，$a_{11}=-8$，则$a_7=$(　　)

A. -5　　B. -4　　C. 4 或 -4　　D. 4

9. 将一张坐标纸折叠一次，使得点$(0,2)$与点$(4,0)$重合，点$(7,3)$与点(m,n)重合，则$m+2n=$(　　)

A. 6　　B. 10　　C. 13　　D. 20

10.十二生肖，又叫十二属相，每一个人的出生年份对应了十二种动物(鼠、牛、虎、兔、龙、蛇、马、羊、猴、鸡、狗、猪)中的一种，现有十二生肖的吉祥物各一个，甲乙丙三位同学各选一个作为礼物，甲同学喜欢牛和马，乙同学喜欢牛、狗和羊，丙同学每个吉祥物都喜欢，若要使三位同学对所选的礼物都喜欢，则选法有(　　)

A. 20 种　　B. 30 种　　C. 50 种　　D. 60 种

11.在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，下列说法正确的是(　　)

A. A_1C_1与B_1C成$60°$角　　B. $D_1C_1\perp AB$

C. AC_1与DC成$45°$角　　D. $A_1C_1\perp AD$

12.在平面直角坐标系中，已知双曲线C与双曲线$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$有公共的渐近线，且双曲线C经过点$P(-2,\sqrt{3})$，则双曲线C的焦距为(　　)

A. $\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $3\sqrt{3}$　　D. $4\sqrt{3}$

13.在$(2+x)^6\cdot(1+y)^m$的展开式中，已知x^3y项的系数为800，则xy^4项的系数为(　　)

A. 30　　B. 960　　C. 300　　D. 360

14.先后抛掷两枚均匀的正方体骰子(它们的六个面分别标有点数 1，2，3，4，5，6)，骰子朝上的点数分别为x和y，则$\log_{2x}y=1$的概率为(　　)

A. $\dfrac{1}{6}$　　B. $\dfrac{5}{36}$　　C. $\dfrac{1}{12}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

15.已知m,n是两条不同直线，α,β是两个不同平面，则下列命题中正确的是(　　)

A.若平面α,β垂直于同一平面，则α与β平行

B.若直线m,n平行于同一个平面，则m与n平行

C.若平面α,β不平行，则在α内不存在与β平行的直线

D.若直线m,n不平行，则m与n不可能垂直于同一平面

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分,共 30 分，把答案按题号填入答题纸。

16. 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=-f(x+1)$，且 $f(1)=3$，则 $f(2021)=$____________.

17. 已知函数 $f(x)=\sin[2(x+\varphi)](\varphi>0)$ 为偶函数，则 φ 的最小取值是______.

18. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,且 $a_4+a_7=a_6+3$，则 $S_9=$_________.

19. 某电子厂投产一种新型电子产品，每件制造成本为18元，试销过程中发现，每月销售量 y (万件)与销售价格 x (元/件)之间的关系满足 $y=-2x+100$，已知：利润=销售总金额－总制程成本，则厂商每月获得的最大利润是_________万元.

20. 从数字 1，2，3，4，5 中随机抽取 3 个数字(允许重复)组成一个三位数，其各位数字之和等于 9 的概率为_________.

21. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{n^2}=1(m>0,n>0)$ 的焦点与抛物线 $x^2=8y$ 的焦点相同，椭圆的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，则 $m-n=$__________.

三、解答题：本大题共 4 小题，每小题 15 分，共 60 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤，请把你的解答按题号写在答题纸上）

22. 在三角形 ABC 中，A,B,C 为三个内角，满足 $\cos(A-C)=0$，$\sin B=\dfrac{1}{3}$.

(1)求 $\sin A$ 的值；

(2)若 AC 边长为 $\sqrt{6}$，求三角形 ABC 的面积。

23. 已知函数 $f(x)=x^2-|x|$.

(1)若 $f(x)=c$ 恰有两个不同的实数解，求常数 c 的值；

(2)若 $f(\log_3(m+1))<f(2)$，求实数 m 的取值范围。

24.（选考历史或地理的考生做题目 I,不必做题目 II，选考物理、化学或生物的考生做题目 II，不必做题目 I).

I.在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，当$n\ge 2$时，$a_n+a_{n-1}=-4n+2$.

(1)证明：$\{a_n+2n\}$为等比数列；

(2)求数列$\{a_n\}$的前n项和S_n.

II. 设数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足$S_n+a_n=\dfrac{2}{n+1}-\dfrac{1}{n}$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)证明：当$n\ge 5$时，$a_n<0$.

25.（选考历史或地理的考生做题目 I，不必做题目 II，选考物理、化学或生物的考生做题目 II，不必做题目 I）。

I. 已知椭圆$C:x^2+2y^2=2m^2$，$m>0$，过椭圆左焦点F的直线L与椭圆交于A，B两点.

(1)设L的斜率为k，求AB中点的横坐标；

(2)判断以AB为直径的圆与直线$x=-2m$的位置关系.

II.已知抛物线$C:y=\dfrac{x^2}{4}$，O是坐标原点，过定点$(0,2)$的直线L与抛物线C交于A，B两点，设x轴上存在两点M，N，使得$AM\perp MB$，$AN\perp NB$，求证$|OM|\cdot|ON|$为定值.

2021 年暨南大学、华侨大学招收、港、澳、台、华侨、华人及其他外籍学生入学考试数学参考答案

一、选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
答案	D	B	A	B	C	A	A	B	C	C	A	D	B	C	D

二、填空题：

16、3； **17、**$\frac{\pi}{4}$**；** **18、**27**；** **19、**512**；** **20、**$\frac{19}{125}$**；** **21、**$2\sqrt{3}-4$**.**

三、解答题：

22、解：(1) 由 $\cos(A-C)=0$，知 $A-C=\pm\frac{\pi}{2}$，$C=A\pm\frac{\pi}{2}$ ………2 分

若 $C=A+\frac{\pi}{2}$，由 $\sin B=\sin(A+C)=\sin(2A+\frac{\pi}{2})=\cos 2A=1-2\sin^2 A=\frac{1}{3}$.

又因为 $\sin A>0$，解得 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ………5 分

若 $C=A-\frac{\pi}{2}$，由 $\sin B=\sin(A+C)=\sin(2A-\frac{\pi}{2})=-\cos 2A=2\sin^2 A-1=\frac{1}{3}$.

又因为 $\sin A>0$，解得 $\sin A=\frac{\sqrt{6}}{3}$. ………7 分

(2) 当 $C=A+\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{3}$，且 $\sin B=\frac{1}{3}$，由正弦定理 $\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}$，得 $BC=3\sqrt{2}$.

这时 A 为锐角，C 为钝角，故 $\sin C=\sin(A+\frac{\pi}{2})=\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

所以 ΔABC 的面积为 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}CA\times CB\times\sin C=3\sqrt{2}$ ………11 分

当 $C=A-\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin A=\frac{\sqrt{6}}{3}$，且 $\sin B=\frac{1}{3}$，由正弦定理 $\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}$，得 $BC=6$.

这时 C 为锐角，A 为钝角，故 $\sin C=\sin(A-\frac{\pi}{2})=-\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以 ΔABC 的面积为 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}CA\times CB\times\sin C=3\sqrt{2}$ ………14 分

综上可知ΔABC的面积为$S_{\Delta ABC}=3\sqrt{2}$·········15 分

23、解：(1) $f(x)=x^2-|x|$，故$f(-x)=f(x)$，即函数$y=f(x)$是一个偶函数.·········2 分

当$x\in[0,+\infty)$时$f(x)=x^2-x=(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$，由二次函数的性质知，$y=f(x)$在$[0,\frac{1}{2})$上单调递减，在$(\frac{1}{2},+\infty)$上单调递增，且在$x=\frac{1}{2}$处取得极小值$f(\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}$.·········4 分

方程$f(x)=c$有两个不相等的实数根，即$y=f(x)$与直线$y=c$有两个不同的交点.

由于函数$y=f(x)$是偶函数故其图象关于y轴对称，又知$f(0)=0$，

故当且仅当$c>0$或$c=-\frac{1}{4}$时，直线$y=c$与函数$y=f(x)$的图象有两个不同的交点.

所以方程$f(x)=c$有两个不相等的实数根时，c的取值为$\left\{-\frac{1}{4}\right\}\cup(0,+\infty)$.······8 分

(2) $f(\log_3(m+1))<f(2)\Leftrightarrow|\log_3(m+1)|^2-|\log_3(m+1)|-2<0$

$\Leftrightarrow -1<|\log_3(m+1)|<2\Leftrightarrow -2<\log_3(m+1)<2\Leftrightarrow -\frac{8}{9}<m<8$

所以m的取值范围为$(-\frac{8}{9},8)$. ·········15 分

24、Ⅰ.解：(1) $a_n+a_{n-1}=-4n+2\Rightarrow a_n+2n=-[a_{n-1}+2(n-1)]$，······4 分

又$a_1+2=3\neq0$，故数列$\{a_n+2n\}$是一个首项为 3，公比为-1的等比数列.······7 分

(2)由(1)可知$a_n+2n=3\times(-1)^{n-1}\Rightarrow a_n=-2n+3\times(-1)^{n-1}$.······11分

因此，$S_n=-n(n+1)+\frac{3}{2}[1-(-1)^n]$······15分

Ⅱ.解：(1)当$n=1$时，由$a_1=S_1$代入已知可得$a_1=0$······1分

把n换成$n+1$可得$S_{n+1}+a_{n+1}=\frac{2}{n+2}-\frac{1}{n+1}$，减去$S_n+a_n=\frac{2}{n+1}-\frac{1}{n}$，

得到：$2a_{n+1}-a_n=\frac{2}{n+2}-\frac{3}{n+1}+\frac{1}{n}$，······3分

上式可变成$2(a_{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+1})=a_n-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}$，

即$a_{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2}(a_n-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n})$，

又 $a_1-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}\neq 0$，故数列 $\left\{a_n-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}\right\}$ 是一个首项为 $\frac{1}{2}$，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列.……7 分

所以 $a_n-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2^n}\Rightarrow a_n=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$. ……9 分

(2) 由 (1) 可知 $a_n=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{1}{2^n}-\frac{1}{n(n+1)}<0\Leftrightarrow 2^n>n(n+1)$. ……10 分

当 $n=5$ 时，上面不等式显然成立. ……11 分

当 $n\geq 6$ 时，利用二项式定理，

$$2^n=C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n\geq C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^{n-2}+C_n^{n-1}+C_n^n=n^2+n+2>n(n+1)$$

综合可知，当 $n\geq 5$ 时，$a_n<0$ 恒成立. ……15 分

(也可以得用数学归纳法)

25、Ⅰ(1) 左焦点为 $(-m,0)$ 设直线方程为 $y=k(x+m)$， ……2 分

代入椭圆方程得到 $(1+2k^2)x^2+4k^2mx+2m^2(k^2-1)=0$ (*)

由根与系数的关系 $x_A+x_B=-\frac{4k^2m}{1+2k^2}$，$x_A\cdot x_B=\frac{2m^2(k^2-1)}{1+2k^2}$ ……5 分

由上面得到 $\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{-2k^2m}{1+2k^2}$，这就是 AB 中点的横坐标. ……7 分

(2) 利用方程 (*) 式的根与系数关系，

可得 $|x_A-x_B|=\sqrt{(x_A+x_B)^2-4x_A\cdot x_B}=\sqrt{(-\frac{4k^2m}{1+2k^2})-4\cdot\frac{2m^2(k^2-1)}{1+2k^2}}=\frac{2m\sqrt{2(k^2+1)}}{1+2k^2}$ ……9 分

故半径 $R=\frac{|AB|}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{1+k^2}|x_A-x_B|$ $R=\frac{\sqrt{2}m(1+k^2)}{1+2k^2}$ ……11 分

圆心为 AB 的中点 $M(x_M,y_M)$，由 (1) 知 $x_M=\frac{-2k^2m}{1+2k^2}$，

故圆心到直线的距离 $d=|x_M-(-2m)|=\frac{2m(1+k^2)}{1+2k^2}$

由于 $m>0$，这时 $d>R$，该圆与直线 $x=-2m$ 是相离的关系. ……15 分

Ⅱ. 直线过定点 $(0,2)$，显然斜率存在，可设直线的方程为 $y=kx+2$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

联立抛物线，得 $x^2-4kx-8=0$，显然 $\Delta=16k^2+32>0$，

由根与系数的关系 $x_1+x_2=4k$， $x_1\cdot x_2=-8$ ……6分

设 M， N 的坐标分别为 $M(m,0)$， $N(n,0)$ $(m\neq n)$

由 $AM\perp MB\Rightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0\Rightarrow m^2-(x_1+x_2)m+x_1x_2+y_1y_2=0$

又知 $x_1+x_2=4k$， $x_1\cdot x_2=-8$，且 $y_1y_2=\frac{x_1^2}{4}\cdot\frac{x_2^2}{4}=\frac{(x_1x_2)^2}{16}=4$，

故得 $m^2-4km-4=0$， ……10分

同理可得 $n^2-4kn-4=0$，

所以 m,n 是一元二次方程 $x^2-4kx-4=0$ 的两个不等实根.

故 $m+n=4k$, $mn=-4$

于是 $|OM|\cdot|ON|=|mn|=4$ ……15分