

## 2024年中华人民共和国普通高等学校

### 联合招收华侨港澳台学生入学考试

#### 数学

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ,  $B = \{-2, -1, 2, 3\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )  
(A)  $\{3\}$  (B)  $\{0, 1\}$  (C)  $\{-2, -1, 2\}$  (D)  $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
2.  $\frac{3+4i}{1-2i} =$  ( )  
(A)  $1-2i$  (B)  $1+2i$  (C)  $-1-2i$  (D)  $-1+2i$
3. 函数  $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x$  的最大值是 ( )  
(A) 2 (B)  $\sqrt{3}$  (C)  $\sqrt{2}$  (D) 1
4. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的离心率为  $\sqrt{10}$ , 则其渐近线方程是 ( )  
(A)  $y = \pm \frac{1}{3}x$  (B)  $y = \pm \frac{1}{2}x$  (C)  $y = \pm 2x$  (D)  $y = \pm 3x$
5. 已知平面向量  $a = (1, 1)$ ,  $b = (x+1, y)$ , 则 ( )  
(A) “ $x=1, y=-2$ ” 是 “ $a \parallel b$ ” 的必要条件  
(B) “ $x=1, y=-2$ ” 是 “ $a \parallel b$ ” 的充分条件  
(C) “ $x=1, y=-2$ ” 是 “ $a \perp b$ ” 的必要条件  
(D) “ $x=1, y=-2$ ” 是 “ $a \perp b$ ” 的充分条件
6. 已知函数  $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}+x)$ , 则 ( )  
(A)  $f(x)$  是奇函数, 不是增函数 (B)  $f(x)$  是增函数, 不是奇函数  
(C)  $f(x)$  既是奇函数, 也是增函数 (D)  $f(x)$  既不是奇函数, 也不是增函数
7. 若  $(a+x)^4$  的展开式中  $x$  的系数是  $-\frac{1}{2}$ , 则  $a =$  ( )  
(A) 1 (B)  $\frac{1}{2}$  (C)  $-\frac{1}{2}$  (D) -1
8. 圆  $x^2 + (y+2)^2 = 4$  与圆  $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$  交于  $A, B$  两点, 则直线  $AB$  的方程为 ( )

- (A)  $2x - 3y + 2 = 0$  (B)  $3x + 2y + 2 = 0$   
(C)  $3x + 2y - 2 = 0$  (D)  $2x - 3y - 2 = 0$
9. 已知  $x = \frac{\pi}{4}$  和  $x = \frac{\pi}{2}$  都是函数  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0$ ) 的极值点, 则  $\omega$  的最小值是( )  
(A) 4 (B) 2 (C) 1 (D)  $\frac{1}{2}$
10. 抛物线  $C: y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 的焦点为  $F$ ,  $C$  上的点到  $F$  的距离等于到直线  $x = -1$  的距离, 则  $p =$  ( )  
(A) 2 (B) 1 (C)  $\frac{1}{2}$  (D)  $\frac{1}{4}$
11. 正四棱柱的八个顶点都在一个半径为 1 的球  $O$  的球面上,  $O$  到该正四棱柱侧面的距离为  $\frac{1}{2}$ , 则该正四棱柱的体积是( )  
(A)  $2\sqrt{2}$  (B)  $\sqrt{2}$  (C)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (D)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$
12. 已知偶函数  $f(x)$  的图像关于直线  $x = 1$  对称, 当  $0 \leq x \leq 1$  时,  $f(x) = x^2 + 2x$ , 则当  $2 \leq x \leq 3$  时,  $f(x) =$  ( )  
(A)  $x^2 + 2x$  (B)  $x^2 - 2x$  (C)  $-x^2 + 2x$  (D)  $-x^2 - 2x$

二、填空题: 本题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。

13. 用 1, 2, 3, ..., 9 这个数学, 组成没有重复数字的三位数, 其中奇数共有 \_\_\_\_\_ 个.
14. 记等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $S_2 = 16$ ,  $S_4 = 24$ , 则  $a_8 =$  \_\_\_\_\_.
15. 不等式  $2|x| \leq |x - 2|$  的解集为 \_\_\_\_\_.
16. 函数  $f(x) = e^x - 2x$  的最小值是 \_\_\_\_\_.
17. 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $R$ , 若  $f(x-1)f(x+1) = x^2 + 4x + 3$ ,  $f(1) = 3$ , 则  $f(9) =$  \_\_\_\_\_.
18. 已知二面角  $\alpha - AB - \beta$  的大小为  $90^\circ$ , 正方形  $ABCD$  在  $\alpha$  内, 等边三角形  $ABF$  在  $\beta$  内,

则异面直线  $AC$  与  $BF$  所成角的余弦值为\_\_\_\_\_.

三、解答题：本大题共 4 小题；每小题 15 分，共 60 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

19. 已知  $\triangle ABC$  中， $A = \frac{\pi}{3}$ ， $AC = AB \tan B$ .

(1) 求  $B$ ；

(2) 求  $\sin A + \sin B + \sin C$ .

20. 在一个工作日中，某工人至少使用甲、乙两仪器中的一个，该工人使用甲仪器的概率为 0.6，使用乙仪器的概率为 0.5，且不同工作日使用仪器的情况相互独立.

(1) 求在一个工作日中该工人既使用甲仪器也使用乙仪器的概率；

(2) 记  $X$  为 100 个工作日中，该工人仅使用甲仪器的天数，求随机变量  $X$  的数学期望  $E(X)$ .

21. 记数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 已知,  $a_1 = 4$ ,  $a_{n+1} = \frac{4(n+1)}{2n-1}(S_n - 1)$ .

(1) 证明: 数列  $\left\{\frac{S_n - 1}{2n - 1}\right\}$  是等比数列;

(2) 求  $\{a_n\}$  的通项公式.

22. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左焦点为  $F$ , 点  $A(-a, 0)$ ,  $B(0, b)$ , 过  $F$  的直线

$x - y + 1 = 0$  交  $C$  于  $B, P$  两点.

(1) 求  $P$  的坐标;

(2) 若点  $R(-2, y_0)$  在直线  $AB$  上, 证明:  $FR$  是  $\angle PFA$  的角平分线.